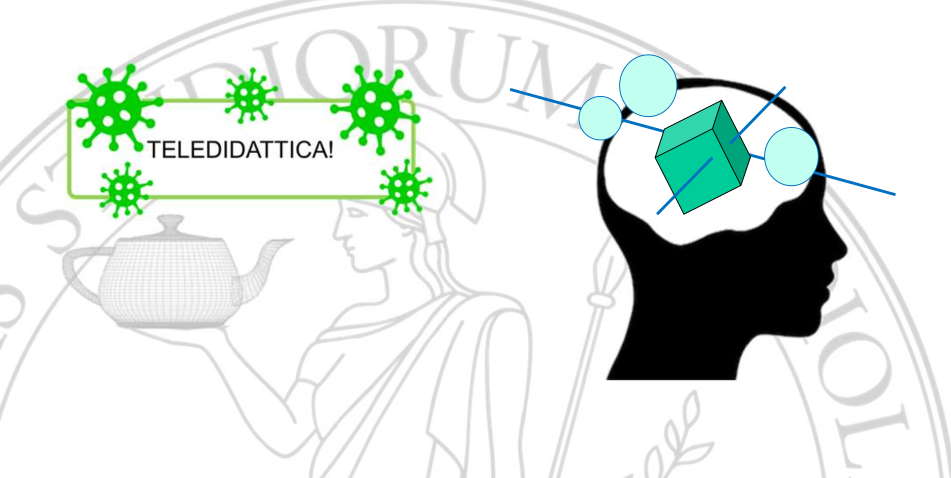
Marco Tarini - Computer Graphics 2019/2020
Università degli Studi di Milano

Vector and Point algebra part 3: prodotti fra vettori



34

Prodotto Dot

✓ Da due vettori a scalare

$$\vec{v} \cdot \vec{w} \in \mathbb{R}$$

$$\vec{v} \cdot \vec{w} = (v_x, v_y, v_z) \cdot (w_x, w_y, w_z) = v_x w_x + v_y w_y + v_z w_z$$

✓ Detto anche:

- ⇒Prodotto dot (perché si scrive con un puntino)
- ⇒Prodotto scalare (perché resituisce uno scalare)
- ⇒Prodotto riga per colonna
(se scrivo il primo vettore come riga e il secondo come colonna)
- ⇒Prodotto interno

35

Prodotto Dot

- Da due vettori a scalare

$$\vec{v} \cdot \vec{w} \in \mathbb{R}$$

- Denotato anche come:

$\vec{v} \cdot \vec{w}$	nota il "pallino", che dà il nome al prodotto (non si omette)
$< \vec{v}, \vec{w} >$	
$(\vec{v}^{T} \ \vec{w})$	"Il trasposto di v (v come vettore riga) per il vettore colonna w"

- Nel codice si può trovare come (linguaggi, librerie):

`dot(v,w)` `v*w`

36

Prodotto dot: alcune proprietà

- Commuta:

$$\vec{v} \cdot \vec{w} = \vec{w} \cdot \vec{v}$$

- E' lineare, cioè
  - ⇒Distribuisce con prodotto x scalare:

$$k\ (\vec{v} \cdot \vec{w}) = (k\ \vec{v}) \cdot \vec{w} = \vec{v} \cdot (k\vec{w})$$

  - ⇒Distribuisce con la somma vettoriale:

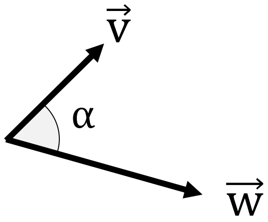
$$\vec{w} \cdot (\vec{u} + \vec{v}) = \vec{w} \cdot \vec{u} + \vec{w} \cdot \vec{v}$$

- Riscrittura della norma:

$$\vec{v} \cdot \vec{v} = ||\vec{v}||^2$$

37

Prodotto dot e coseno



$$\vec{v} \cdot \vec{w} = \|\vec{v}\| \ \|\vec{w}\| \ \cos(\alpha)$$

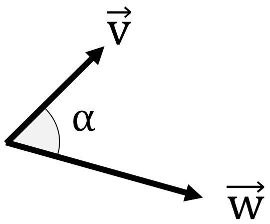
quindi se $\vec{v}$ e $\vec{w}$ non sono nulli: $\vec{v} \cdot \vec{w} = 0 \iff$ $\mathbf{u}$ e $\mathbf{v}$ ortogonali

se $\hat{v}$ e $\hat{w}$ sono unitari: $\hat{v} \cdot \hat{w} = \cos(\alpha)$

38

Prodotto dot e angolo

- ✓ Se $\vec{v}$ oppure $\vec{w}$ è degenere (vettore nullo) allora $\vec{v} \cdot \vec{w} = 0$
- ✓ Altrimenti:
  - ⇒ $\vec{v} \cdot \vec{w} > 0$ i due vettori sono concordi, $\alpha < 90°$
  - ⇒ $\vec{v} \cdot \vec{w} = 0$ i due vettori sono ortogonali, $\alpha = 90°$
  - ⇒ $\vec{v} \cdot \vec{w} < 0$ i due vettori sono discordi, $\alpha > 90°$



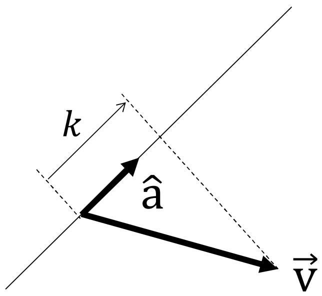
39

Prodotto dot fra vettori unitari

- Siano $\hat{v}$ e $\hat{w}$ due vettori unitari
- I due vettori sono…
  - ⇒sse $\hat{v} \cdot \hat{w} = 1$: coincidenti
  - ⇒sse $0 < \hat{v} \cdot \hat{w} < 1$: concordi
  - ⇒sse $\hat{v} \cdot \hat{w} = 0$: ortogonali
  - ⇒sse $-1 < \hat{v} \cdot \hat{w} < 0$: discordi
  - ⇒sse $\hat{v} \cdot \hat{w} = -1$: opposti
- In pratica, fra vettori unitari il prodotto dot è una misura di similitudine

40

Prodotto dot e proiezione



$k = \hat{a} \cdot \vec{v}$

se $\hat{a}$ è unitario:

$\hat{a} \cdot \vec{v} =$ estensione di $\hat{a}$ in direzione $\vec{v}$

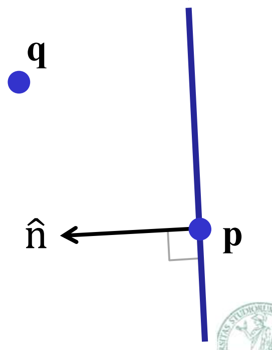
41

Esercizio: test punto / piano

- Sia dato un piano passante per $\mathbf{p}$ con normale $\hat{n}$
  - ⇒normale = *vett unitario ortogonale al piano*
  - ⇒$\mathbf{p}$ punto, $\hat{n}$ vettore unitario

rappresenta il piano «visto di fianco»

- Calcolare se un dato punto $\mathbf{q}$ …
  - ⇒giace sul piano
  - ⇒si trova davanti al piano (è nel semispazio *davanti* al piano)
  - ⇒si trova dietro al piano (è nel semispazio *dietro* al piano)



42

Esercizio: test punto / piano

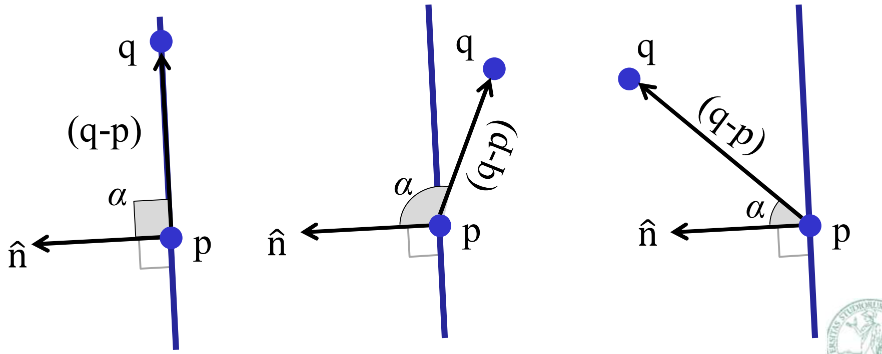
- Soluz:

$(\mathbf{q} - \mathbf{p}) \cdot \hat{n} = 0 \iff \alpha = 90° \iff$ $\mathbf{q}$ sul piano

$(\mathbf{q} - \mathbf{p}) \cdot \hat{n} < 0 \iff \alpha > 90° \iff$ $\mathbf{q}$ dietro al piano

$(\mathbf{q} - \mathbf{p}) \cdot \hat{n} > 0 \iff \alpha < 90° \iff$ $\mathbf{q}$ davanti al piano

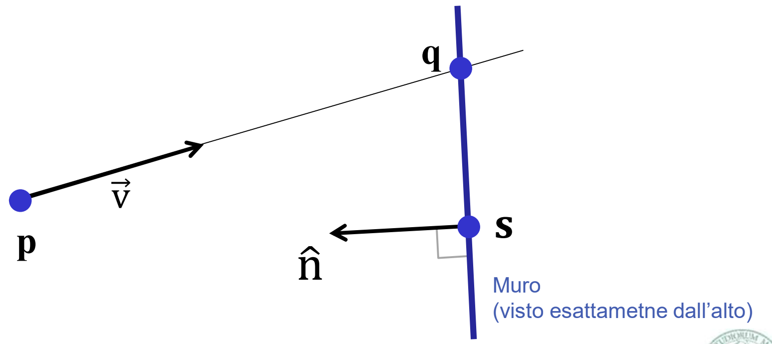
dot product



43

Esercizio 2: intersezione retta piano

Una persona inizialmente punto $\mathbf{p}$ si sposta del vettore $\vec{v}$ ogni secondo, in linea retta.
Davanti a se ha un muro passante per il punto $\mathbf{s}$ con normale $\hat{n}$
Trovare il punto $\mathbf{q}$ di impatto persona / muro



44

Traccia della soluzione e note

- Il muro (un piano) è definito da un punto appartenente al piano (qualsiasi) e la sua normale
- Il vettore $\vec{v}$ rappresenta la velocità della persona
- A tempo t, la persona ha fatto t passi in direzione $\vec{v}$
- Sia t il tempo di impatto (incognita). Allora
$$q = p + t\,\vec{v}$$
- Sappiamo che q è sul piano. Allora il vettore $(q - s)$ è ortogonale alla normale del piano
$$(q - s) \cdot \hat{n} = 0$$
- Sostituendo, otteniamo
$$(p + t\,\vec{v} - s) \cdot \hat{n} = 0$$
- Risolvendo per t ottengo…
$$t = \frac{(s-p)\cdot\hat{n}}{\vec{v}\cdot\hat{n}}$$
- Sapendo t ricostruisco q come $p + t\,\vec{v}$

45

Prodotto Cross

✓ Da due vettori a vettore

$$\vec{v} \times \vec{w} = \begin{pmatrix} v_x \\ v_y \\ v_z \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} w_x \\ w_y \\ w_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} v_y\, w_z - v_z\, w_y \\ v_z\, w_x - v_x\, w_z \\ v_x\, w_y - v_y\, w_x \end{pmatrix}$$

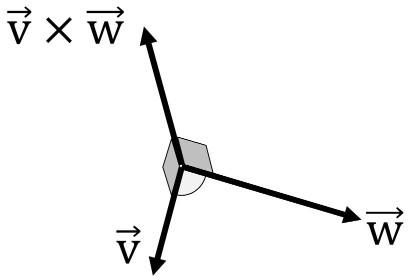
✓ Detto anche:
- ⇒Prodotto cross (perché si scrive con la crocetta)
- ⇒Prodotto vettoriale (perché restituisce uno vettore)

✓ Nel codice (librerie, linguaggi…) lo si può trovare scritto come: `cross(v,w)` `v^w` `v%w`

✓ E' definito solo in $\mathbb{R}^3$!

53

Prodotto cross e ortogonalità



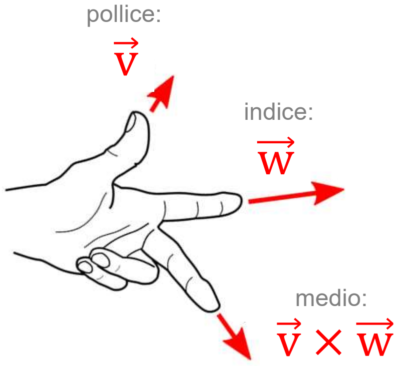
✓ Il prodotto cross fra $\vec{v}$ e $\vec{w}$ è sempre ortogonale sia a $\vec{v}$ che a $\vec{w}$
- ⇒Verificare, calcolando il dot fra $\vec{v} \times \vec{w}$ e $\vec{v}$, oppure $\vec{w}$

✓ Prodotto cross = operazione per generare un vettore ortogonale a due vettore dati

54

Verso del prodotto cross

- ✓ Un vettore ortogonale a due vettori (cioè al piano passante per quei due vettori) può assumere due versi opposti.
- ✓ **In quale dei due versi sarà orientato il cross?**



- ✓ Dipende dall'ordine degli operandi!
- ✓ NB: Bisogna applicare la stessa mano usata per *immaginare* gli assi

55

Prodotto cross: alcune proprietà

- ✓ Non commuta, anzi è anticommutativo:

$$\vec{v} \times \vec{w} = -\,\vec{w} \times \vec{v}$$

- ✓ E' lineare, cioè
  - ⇒Distribuisce con prodotto x scalare:

$$k\,(\vec{v} \times \vec{w}) = (k\,\vec{v}) \times \vec{w} = \vec{v} \times (k\vec{w})$$

  - ⇒Distribuisce con la somma vettoriale:

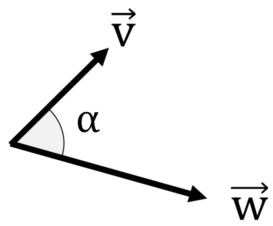
$$\vec{w} \times (\vec{u} + \vec{v}) = \vec{w} \times \vec{u} + \vec{w} \times \vec{v}$$

- ✓ Per tutti i vettori:

$$\vec{v} \times \vec{v} = \vec{0}$$

56

Lunghezza del prodotto cross



$$\|\vec{v} \times \vec{w}\| = \|\vec{v}\| \ \|\vec{w}\| \ |\sin(\alpha)|$$

È anche la doppia area del triangolo avente per lati $\vec{v}$ e $\vec{w}$!

se $\hat{v}$ e $\hat{w}$ sono unitari: $\|\hat{v} \times \hat{w}\| = |\sin(\alpha)|$

57

Prodotto cross, ortogonalità e allineamento

- ✓ Se $\vec{v}$ oppure $\vec{w}$ è degenere (vettori nulli) allora $\vec{v} \times \vec{w}$ è degenere (vettore nullo)
- ✓ Altrimenti:
  - ⇒ $\|\vec{v} \times \vec{w}\| = 0$ i due vettori sono allineati (possono essere opposti oppure no)
- ✓ Siano $\hat{v}$ e $\hat{w}$ due vettori unitari. Allora
  - ⇒ $\hat{v} \times \hat{w}$ è unitario sse $\hat{v}$ e $\hat{w}$ sono ortogonali
  - ⇒ $\hat{v} \times \hat{w}$ è nullo sse $\hat{v}$ e $\hat{w}$ sono coincidenti $\hat{v} = \hat{w}$ oppure opposti $\hat{v} = -\hat{w}$

58