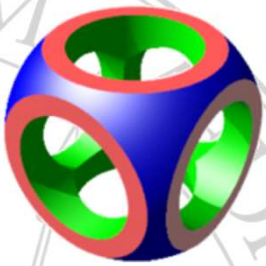
Una (imperfetta) categorizzazione dei tipi di modelli digitali 3D

		ELEMENTI DISCRETI			CONTINUI
		regolari *«a griglia»*	semi-regolari o irregolari		
			elementi simpliciali	elementi non simpliciali	
SUPERFICIALI	2-manifold *«rappresenta una vera superficie»*	**Height Field** **Range Scan** **Geometry Images**	**Triangle Mesh**	**Polygonal Mesh** **Quad Mesh** **Quad dominant Mesh**	**Subdivision surfaces** **Parametric Surfaces** **(es. B-splines)**
	non-manifold *«non rappresenta una sup»*	**Set di Range Scan**	**Point Cloud**		
VOLUMETRICI	(3-manifold)	**Voxelized Volume** **Volumetric Textures**	**Tetra Mesh**	**Hexa Mesh**	**Implicit models** **(es. CSG)**

85

Marco Tarini - Computer Graphics 2019/2020
Università degli Studi di Milano

Modelli impliciti



86

Modello implicito

- ✓ Un oggetto definito (implicitamente) da una funzione contina f
  che va da punti dello punti 3D a valori scalari
  (detta funz. generatrice o funz. primitiva)

$$f: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$$

- ✓ Il valore di f definisce, per un punto dato $\mathbf{p}$, se è dentro oppure fuori dall'oggetto:
  - ⇒ $f(\mathbf{p}) < 0$ <==> $\mathbf{p}$ dentro
  - ⇒ $f(\mathbf{p}) > 0$ <==> $\mathbf{p}$ fuori
  - ⇒ $f(\mathbf{p}) = 0$ <==> $\mathbf{p}$ sulla superficie

87

Modelli impliciti: semantica del valore scalare

- ✓ Un'interpretazione comune:
  «*valore "fuzzy" di appartenenza all'oggetto*»
  - ⇒ 1 : dentro (appartiene all'oggetto)
  - ⇒ 0 : fuori (non appartiene all'oggetto)
  - ⇒ ½ : posizione della superficie
    (là dove si passa da «più fuori che dentro» a «più dentro che fuori)
- ✓ Un'altra interpretazione comune:
  «*distanza con segno (approssimata) dalla superficie*»
  - ⇒ Valori negativi : dentro (distanza negativa dalla superficie)
  - ⇒ Valori positivi : fuori (distanza positiva dalla superficie)
  - ⇒ Zero : posizione della superficie (per definizione)
  - ⇒ Nota: eccetto dove 0, non deve essere esattamente la distanza
- ✓ Note:
  - ⇒ È facile convertire questi valori uno nell'altro (come?)
  - ⇒ Il gradiente della funzione è invertito nei due casi
    (primo caso: gradiente verso il dentro. Secondo caso: verso il fuori)
  - ⇒ In questi lucidi, assumeremo il secondo caso

88

Superficie implicita

- ✓ E' la **superficie** che delimita il modello implicito (volumetrico)
- ✓ E' dato il **luogo degli zeri** della funzione primitiva:

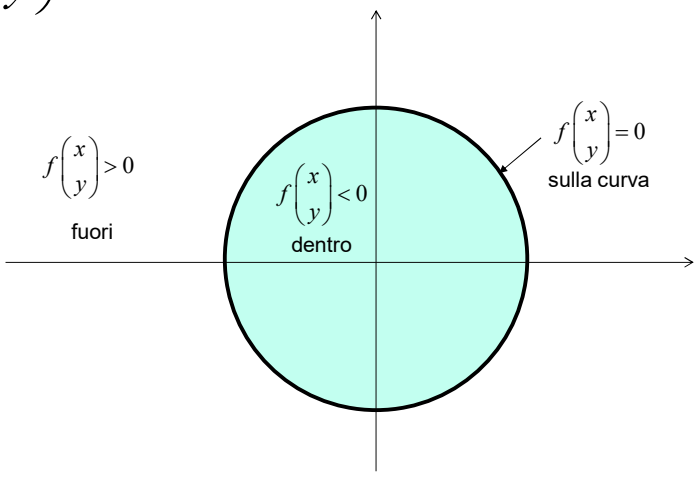
$$f: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$$

(cioè l'insieme di tutti i punti 3D $\mathbf{p}$ t.c. $f(\mathbf{p}) = 0$)

89

Esempio ridotto in 2D: un cerchio

$$f\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = x^2 + y^2 - r^2$$



90

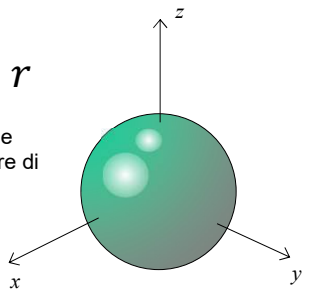
Esempio di modello implicito: una sfera

$$f\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix} = \sqrt{x^2+y^2+z^2} - r$$

cioè

$$f(\mathbf{p}) = \|\mathbf{p} - \mathbf{0}\| - r$$

Origine (vettore di 0,0,0)



Sfera centrata nell'origine

91

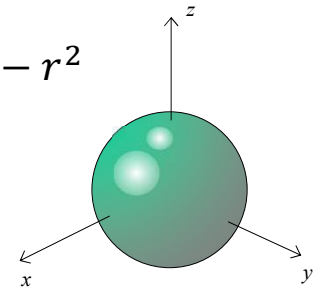
Esempio di modello implicito: una sfera (variante)

$$f\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix} = x^2+y^2+z^2 - r^2$$

Funzione diversa, stessa superficie

cioè

$$f(\mathbf{p}) = \|\mathbf{p} - \mathbf{0}\|^2 - r^2$$



Sfera centrata nell'origine

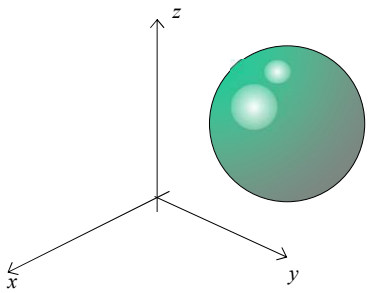
92

Esempio di modello implicito: una sfera

$$f(\mathbf{p}) = \|\mathbf{p} - \mathbf{c}\| - r$$

Funzione diversa, stessa superficie

«La superfice della sfera è il luogo dei punti $\mathbf{p}$ che distano r dal suo centro $\mathbf{c}$»



Sfera centrata nel punto $\mathbf{c}$

93

Categorie di modelli impliciti

- ✓ Superfici algebriche: $f()$ è un polinomio
- ✓ Superfici quadratiche : $f()$ è di grado 2
  - ⇒dette anche «quadriche»
  - ⇒classe importante!
    - equazioni semplici, ma buon potere esressivo
    - per esempio, sfere perfette (l'esempio sopra)
- ✓ Superfici cubiche : $f()$ è di grado 3
- ✓ Superfici quartiche : $f()$ è di grado 4
- ✓ etc

94

Normali di una superficie implicita

- ✓ Sia $\mathbf{p}$ un punto sulla superficie, cioè $f(\mathbf{p}) = 0$
- ✓ Quanto vale la normale alla superficie in $\mathbf{p}$?
  - ⇒ cioè: quale direzione $\hat{\boldsymbol{n}}$ è ortogonale alla superficie nel punto $\mathbf{p}$
  - ⇒ cioè: in che direzione $\hat{\boldsymbol{n}}$ devo spostarmi da $\mathbf{p}$ per allontanarmi il più possibile dalla superficie
  - ⇒ cioè: in che direzione $\hat{\boldsymbol{n}}$ devo spostarmi da $\mathbf{p}$ per aumentare il più possibile il valore di $f\ (\mathbf{p} + k\,\hat{\boldsymbol{n}})$
- ✓ Risposta: basta (per def) prendere il gradiente di $f(\mathbf{p})$
  - ⇒ gradiente f vettore delle derivate parziali in calcolato in $\mathbf{p}$ (rinormalizzato)

$$\hat{\boldsymbol{n}} = \frac{\nabla f(\mathbf{p})}{\|\nabla f(\mathbf{p})\|}$$

95

Gradiente di una funzione (ripasso)

- ✓ Sia $f(\mathbf{p})$ è una funzione da punti a scalari

$$f: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$$

- ✓ Quindi da x, y, z ad un valore scalare
- ✓ Il suo gradiente $\nabla f(\mathbf{p})$ nel punto $\mathbf{p}$ è definito dal vettore delle sue derivate parziali in x, y, z (calcoalte in $\mathbf{p}$)

$$\nabla f(\mathbf{p}) = \begin{pmatrix} \partial f/\partial x \\ \partial f/\partial y \\ \partial f/\partial z \end{pmatrix}$$

- ✓ Ad esempio…

$$f\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = x^2 + y^2 + z^2 - r^2 \qquad \nabla f\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2x \\ 2y \\ 2z \end{pmatrix}$$

← derivata di f in x
← derivata di f in y
← derivata di f in z

funzione primitiva della sfera

gradiente di f, cioè normale della sfera nel punto x, y, z (a meno di normalizzazione)

96

Vantaggi delle superfici implicite

- ✓ E' una rappresentazione volumetrica
  - ⇒ per es, facile determinare se un punto $\mathbf{p}$ sia all'interno o all'esterno di un oggetto – basta valutare f su $\mathbf{p}$!
- ✓ E' molto compatta
  - ⇒ a differenza di quelle discrete!
- ✓ Rappresenta superfici curve
  - ⇒ Paragona con tri-mesh, che rappresenta superfici lineari a tratti (cioè localmente piatti)
- ✓ Buon modello per superfici che variano nel tempo
  - ⇒ es quelle dei fluidi
- ✓ Consentono potenti operazioni di editing
  - ⇒ operazioni volumetriche booleane: vedi sotto

97

Da modello implicito a mesh

- ✓ Modo comune (ma non l'unico): passare da voxel
- ✓ Passi:
  - ⇒ **campionare** f ad (una data risoluzione resx, resy, resz) ottenendo un **campo scalare voxelizzato**

    Parametri dell'algoritmo
  - ⇒ estrarre una mesh poligonale M attraverso **Marching Cubes** (con soglia 0)
  - ⇒ calcolare le **normali** nei vertici di M, con attraverso i **gradienti** di f calcolati nelle posizioni dei vertici

    (preferibile al calcolo delle normali dei vertici attraverso le normali dei triangoli, come abbiamo visto per una mesh generiche)

98

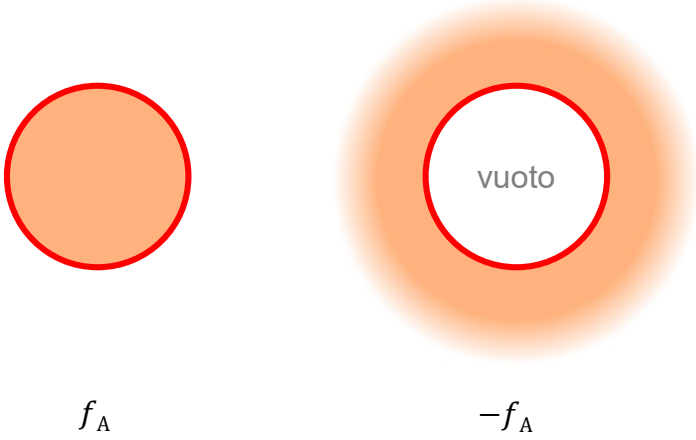
Rendering di un modello implicito

- ✓ un modello implicito può essere renderizzato direttamente
  - ⇒ attraverso algoritmi di ray-casting (o ray-tracing)
  - ⇒ (vedi seconda parte del corso)
- ✓ Alternativa: conversione in mesh
  - ⇒ che può essere renderizzata come normale
- ✓ Vantaggi? Svantaggi?

99

Operazioni booleane volumetriche

- ✓ Opposto: dentro diventa fuori e viceversa

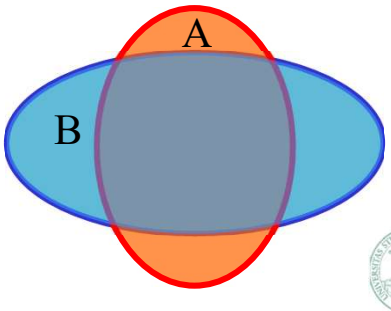


⇒ Posso vedere gli scavi come intersezioni con gli opposti

100

Operazioni booleane volumetriche

- ✓ Siano A e B modelli impliciti con funzioni primitive f_A e f_B
- ✓ Posso definire (come modelli impliciti) la funzione primitive della loro…
  - ⇒inversione: $-f_A$
  - ⇒intersezione: $\max(f_A, f_B)$
  - ⇒unione: $\min(f_A, f_B)$
  - ⇒scavo di B da A: $\min(f_A, -f_B)$
  - ⇒Scavo di A da B: $\min(-f_A, f_B)$



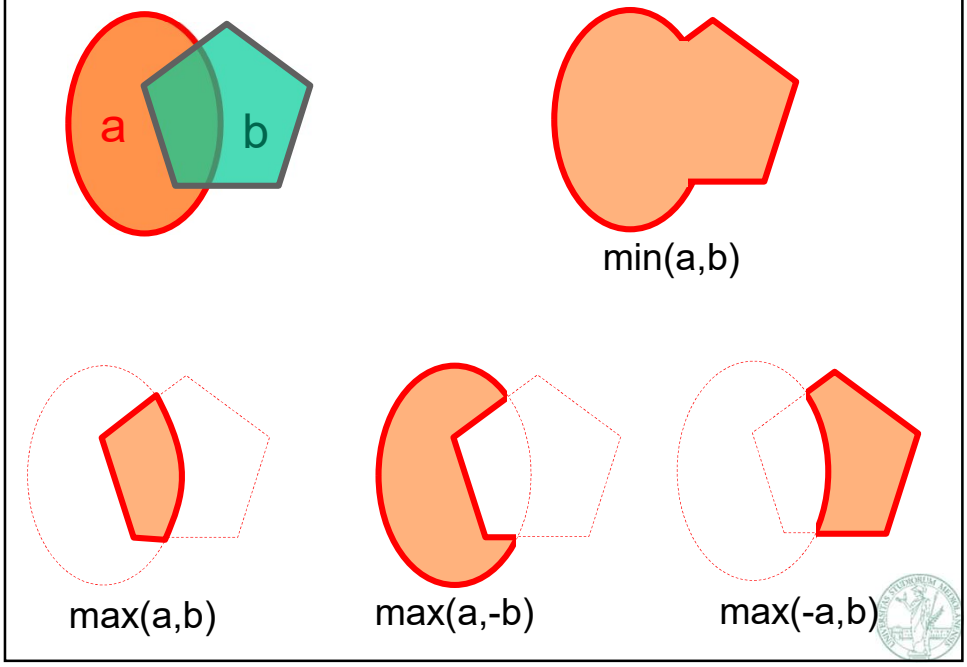
101

Operazioni booleane volumetriche

Operazione volumetrica booleana	Vista come operazione fra insiemi di punti	Vista come operazione booleana	Operaz delle funzione primitiva
Opposto	$\overline{A}$	$\sim A$	$-f_A$
Intersezione	$A \cap B$	$A \wedge B$	$\max(f_A, f_B)$
Unione	$A \cup B$	$A \vee B$	$\min(f_A, f_B)$
Scavo di B da A	$A \cap \overline{B}$	$A \wedge \sim B$	$\max(f_A, -f_B)$
Scavo di A da B	$\overline{A} \cap B$	$(\sim A) \cap B$	$\max(-f_A, f_B)$

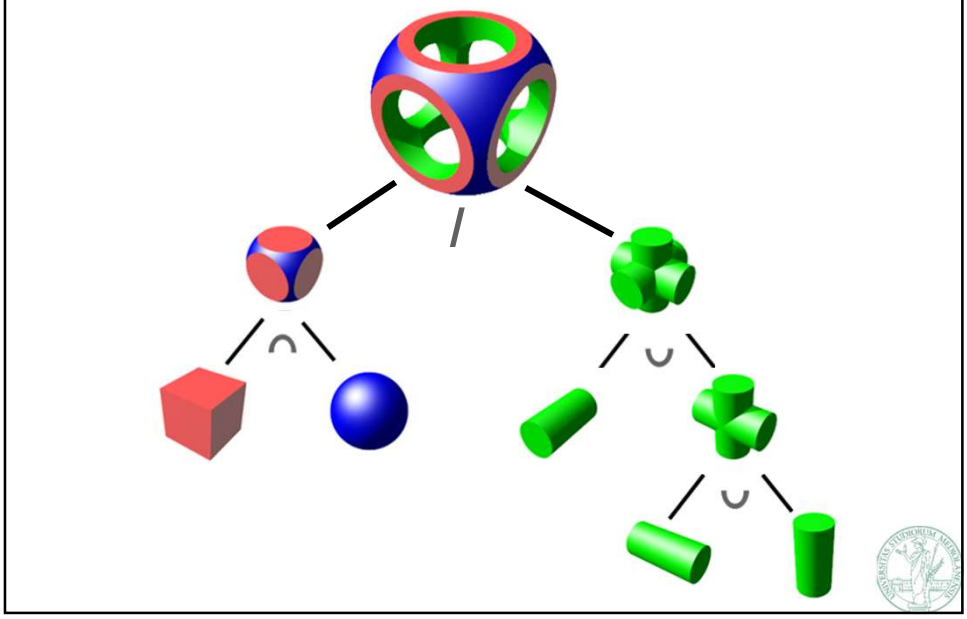
102

Operazioni booleane volumetriche di modelli impliciti



103

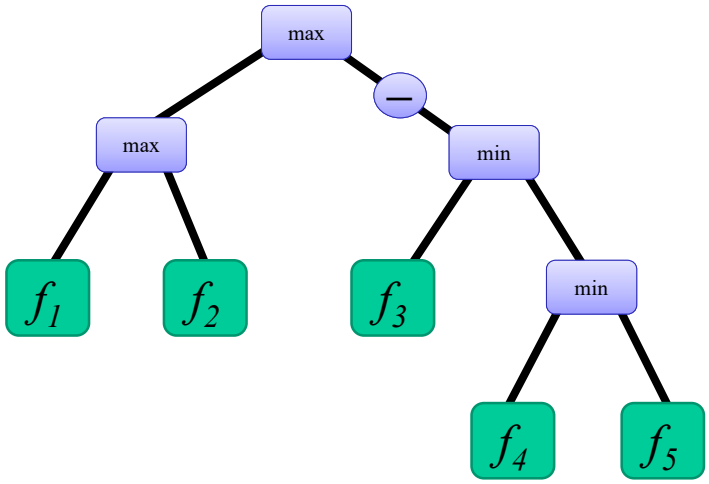
Constructive Solid Geometry (CSG)



104

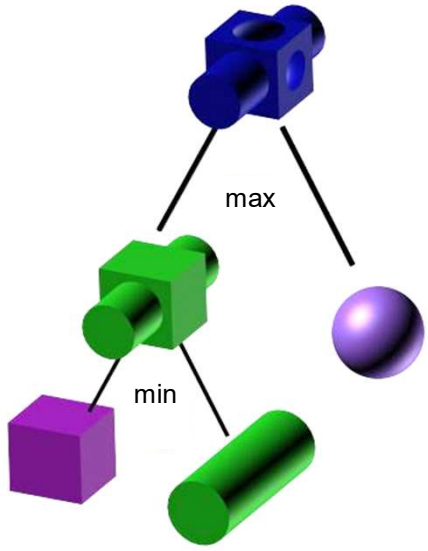
Geometric Solid Modelling

Albero di parsing delle operazioni



105

Constructive Solid Geometry CSG: altro esempio



106

Constructive Solid Geometry

- ✓ Idea: modella oggetti solidi 3D a partire dalle forme più semplici che li compongono
- ✓ Utile per modellare oggetti **meccanici / artificiali**
- ✓ Il modello è rappresentato da una struttura ad albero
  - ⇒ radice = l'intero oggetto
  - ⇒ nodi interni = operazioni booleane dei figli
  - ⇒ foglie = forme basilari – associate a funzioni primitive (come sfere, cilindri, piani, cubi…)
- ✓ E' l'albero di parsing di una espressione di operazioni booleane
- ✓ La l'oggetto risultante può essere renderizzato, convertito in una mesh, etc
  - ⇒ come ogni altra superficie implicita

107

Da modello mesh a modello implicito

- ✓ Un dataset voxelizzato scalare può essere visto come un esempio modello implicito
  - ⇒ La funzione primitiva f è definita, dentro ogni cella cubica della griglia, come l'interpolazione degli 8 voxel memorizzati agli angoli di quella cella
- ✓ Un modo semplice di convertire una mesh M in un modello implicito consiste nel immergere la mesh in una griglia 3D e computare, per ogni vertice della griglia, la sua distanza-con-segno dalla mesh.
  - ⇒ ad una data risoluzione resx, resy, resz Parametri dell'algoritmo
  - ⇒ nota: M deve essere two-manifold, ben orientata a chiusa
- ✓ Questo può essere utile per computare operazioni booleane volumetriche fra mesh:
  - ⇒ Es. date due mesh M0 e M1, computare la loro intersezione.

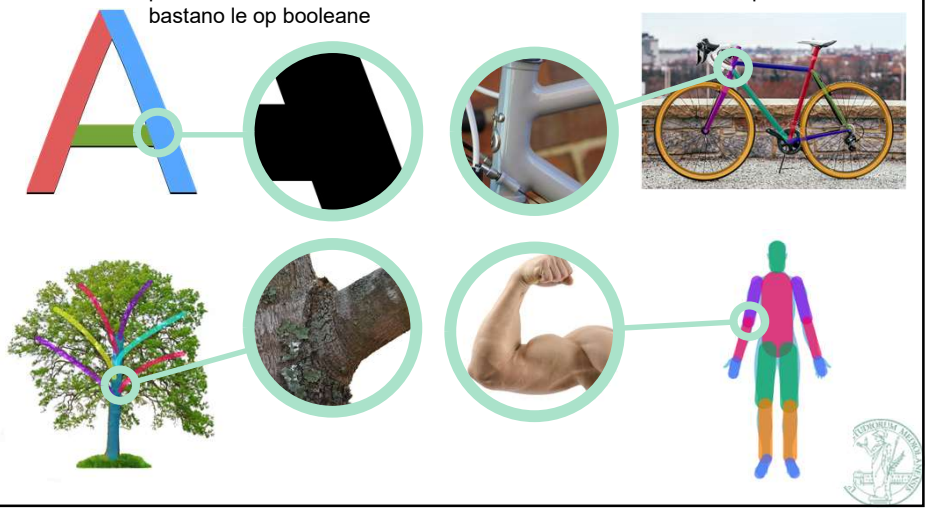
108

Oltre alle sempici operazioni booleane…

- ✓ Per molti oggetti, è utile unire le sottoparti con operazioni diverse da quelle booleane

Esempio:
per una lettera di un font,
bastano le op booleane

Ma la fusione fra due tubi in una biciletta (welding) non è ben approssimata da una op booleana



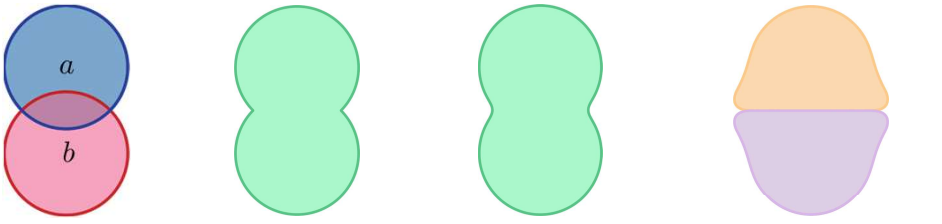
109

Funzioni per fondere modelli impliciti

union
[Sabin 1968]

blend
[Blinn 1982]
[Ricci 1973]

contact & bulge
[Cani 1993]



$\min(a, b)$

$a + b$

$\sqrt{a^n + b^n}^{\frac{1}{n}}$

$$\begin{cases} a - b + 1 & \text{if } b > 1 \\ a + h(a,b) & \text{else} \end{cases}$$

see «meta-balls»

110