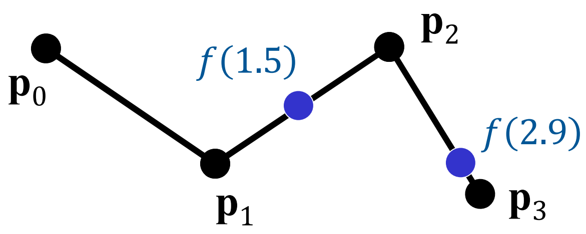
Linea Spezzata

- ✓ Come concatenzione di "curve" lineari
  - ⇒ lineari = f polinomiali di grado 1 (in t)
- ✓ Cioè come curva «lineare a tratti»
  - ⇒ f è lineare "su ogni tratto"
- ✓ Esempio con tre tratti:



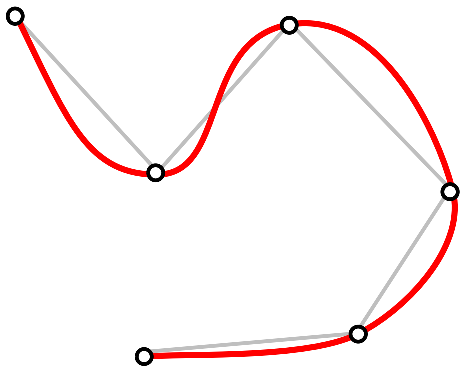
Dominio paremtrico
$A = [0\,,3]$

$$f(t) = \begin{cases} \mathbf{p}_0 + (\mathbf{p}_1 - \mathbf{p}_0)(t-0) & se\ \ t\ \in [0\,,1] \\ \mathbf{p}_1 + (\mathbf{p}_2 - \mathbf{p}_1)(t-1) & se\ \ t\ \in [1\,,2] \\ \mathbf{p}_2 + (\mathbf{p}_3 - \mathbf{p}_2)(t-2) & se\ \ t\ \in [2\,,3] \end{cases}$$

15

Spline

- ✓ Spline = curva *polinomiale* a tratti

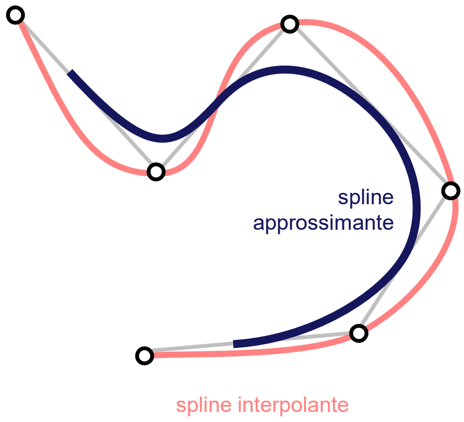


spline interpolante

16

Spline

✓ Spline = curva *polinomiale* a tratti



17

Spline

✓ E’ una curva polinomiale a tratti
- ⇒ Di un certo grado *n*

Nell’esempio giocattolo della linea spezzata, n = 1, ma normalmente, n>1

✓ Una spline è controllata attraverso un insieme **punti di controllo**
- ⇒ Si dice “approssimante” se ci passa “vicino”
  I punti di controllo attirano a sè la curva
- ⇒ Si dice “interplante se ci passa attaverso
  La curva “interpola” i punti di controllo

nota: non si tratta di una interpolazione *lineare* come quelle abbiamo visto

✓ Una spline è divisa in **archi**.

✓ Ogni punto su ogni arco sarà una certa interpolazione lineare dei punti di controllo
- ⇒ i pesi sono un polinomio P(t), di grado *n* >1
- ⇒ *n* è il grado della spline
  (che quindi può essere quadratica, cubica, etc)

✓ Vediamo ora un esempio importante: le curve di Bézier

18

Lo zoo delle splines

- ✓ Sono stati inventati diversi tipi di spline, ad es:
  - ⇒Hermite Splines
  - ⇒Bézier splines
  - ⇒B-splines
  - ⇒NURBS (polinomi razionali)
- ✓ Differiscono in:
  - ⇒Quale formula usano per f
  - ⇒Se la spline è interpolativa o approssimativa
  - ⇒Il grado di continuità raggiungibile alle giunture fra due curve

19

Curve di Bézier: note 1/2

- ✓ Sono una famiglia di splines di grado *n* qualsiasi
  - ⇒La linea spezzata è una curva di Bézier di grado 1,
  - ⇒Vediamo ora come si generalizza
- ✓ Alcune caratteristiche: ← Verificale per il grado 1
  - ⇒Una curva di Beziér è composta da archi di Beziér (giunti alle estermità)
  - ⇒Un arco di Beziér di grado *n* è controllato da *n*+1 punti di controllo
  - ⇒L'arco è interpolante (passa attraverso) il primo e l'ultimo di questi punti, ma in generale non gli altri (la curva è solo approssimante per loro)
  - ⇒Quindi, per rendere la curva continua («disegnabile senza staccare la penna dal foglio») basta far coincidere l'ultimo punto di controllo di un arco col primo dell'arco successivo

20

Curve di Bézier: note 2/2

- ✓ Le curve di Beziér cubiche (n=3) sono le più usate
  - ⇒Vedremo perché
- ✓ Ci sono due modi equivalenti di definire un arco di curva di Beziér (di grado n):
  - ⇒Metodo «grafico»: algoritmo di DeCasteljau
  - ⇒Riformulazione matematica, come polinomio (anni 50, Pierre Beziér)
- ✓ Cenni storici:
  - ⇒le curve di Beziér sono nate per progettare le curve delle fusoliere delle automobili.

21

Formulaz. di De Casteljau: esempio per grado 2

- ✓ Ho tre «control point» $\mathbf{p}_0$, $\mathbf{p}_1$, $\mathbf{p}_2$
- ✓ Data la coordinata parametrica $t \in [0..1]$,trovo :
  - ⇒il punto $\mathbf{q}_0$ interpolando fra $\mathbf{p}_0$ e $\mathbf{p}_1$ (con t)
  - ⇒il punto $\mathbf{q}_1$ interpolando fra $\mathbf{p}_1$ e $\mathbf{p}_2$ (con t)
- ✓ Infine
  - ⇒ottengo il punto finale $f(t)$ interpolando fra $\mathbf{q}_0$ e $\mathbf{q}_0$ (di nuovo con t)

(Esercizio: seguire le istruzioi su un disegno)

Demo: http://www.malinc.se/m/DeCasteljauAndBezier.php

22

Formulaz. di De Casteljau: esempio per grado 3

- 4 «control point» $\mathbf{p}_0$, $\mathbf{p}_1$, $\mathbf{p}_2$, $\mathbf{p}_3$
- data una posizione parametrica t ,trovo:
  - ⇒il punto $\mathbf{q}_0$ interpolando fra $\mathbf{p}_0$ e $\mathbf{p}_1$ (con t)
  - ⇒il punto $\mathbf{q}_1$ interpolando fra $\mathbf{p}_1$ e $\mathbf{p}_2$ (con t)
  - ⇒il punto $\mathbf{q}_2$ interpolando fra $\mathbf{p}_2$ e $\mathbf{p}_3$ (con t)
- poi
  - ⇒il punto $\mathbf{r}_0$ interpolando fra $\mathbf{q}_0$ e $\mathbf{q}_1$ (con t)
  - ⇒il punto $\mathbf{r}_1$ interpolando fra $\mathbf{q}_1$ e $\mathbf{q}_2$ (con t)
- e infine
  - ⇒il punto finale $f\ (\ t\ )$ interpolando fra $\mathbf{r}_0$ e $\mathbf{r}_1$ (con t)

(Esercizio: seguire le istruzioni su un disegno)

23

Curva di Bezier di grado 3 in forma di codice

L'algoritmo di De Casteljau ci fornisce un modo per scrivere la funzione f in modo semplice:

```
vec3 bezier( float t, // posiz. paramet.
             vec3 p0, vec3 p1,
             vec3 p2, vec3 p3)
{
   vec3 q0 = mix(p0,p1, t);   // cioè
                              // p0*(1-t)+p1*t
   vec3 q1 = mix(p1,p2, t);
   vec3 q2 = mix(p2,p3, t);
   vec3 r0 = mix(q0,q1, t);
   vec3 r1 = mix(q1,q2, t);
   return mix( r0, r1, t);
}
```

24

Formulazione equivalente di Bèzier (grado 2)

- Per De Casteljau: $f(t) = (1-t)\mathbf{q}_0 + t\,\mathbf{q}_1$
  con $\mathbf{q}_0 = (1-t)\mathbf{p}_0 + t\,\mathbf{p}_1$
  e $\mathbf{q}_1 = (1-t)\,\mathbf{p}_1 + t\,\mathbf{p}_2$
- Sostituendo, troviamo un f come polinomio di t
  $$f(t) = \mathbf{p}_0 + t(\mathbf{p}_1 - 2\,\mathbf{p}_0) + t^2(\mathbf{p}_0 - \mathbf{p}_1 + \mathbf{p}_2)$$
  - ⇒ avente i pts di controllo $\mathbf{p}_{0,1,2}$ come costanti
  - ⇒ di grado 2, (t compare al quadrato: t^2)
- Se raccogliamo $\mathbf{p}_{0,1,2}$ otteniamo questa riscrittura:
  $$f(t) = (1-t)^2\mathbf{p}_0 + (1-t)\,t\,\mathbf{p}_1 + t^2\mathbf{p}_2$$
- Lo riscrivo, usando $\bar{t} = 1-t$, come:
  $$f(t) = \bar{t}^2\mathbf{p}_0 + \bar{t}\,t\,\mathbf{p}_1 + t^2\mathbf{p}_2$$
  - ⇒ dove $\bar{t} = 1-t$ ($\bar{t}$ è il complemento a 1 di t)
  - ⇒ cioè $\bar{t} + t = 1$

25

Formulazione di Bèzier (grado generico *n*)

- Modo pratico di costruire (*pro tip*: e ricordare) la formula di Bezier di qualsiasi grado n
  - ⇒ Step 1: scomporre l'unità in t e $\bar{t}$: $\bar{t} + t = 1$
  - ⇒ Step 2: elevare alla n entrambi i lati $(\bar{t} + t)^n = 1^n = 1$
  - ⇒ Step 3: ottengo una scomposizione dell'unità in $n+1$ termini
    Esempi, per $n = 2{,}3{,}4$:
    $$(\bar{t}+t)^2 = \bar{t}^2 + 2\,\bar{t}\,t + t^2 = 1$$
    $$(\bar{t}+t)^3 = \bar{t}^3 + 3\,\bar{t}^2 t + 3\,\bar{t}\,t^2 + t^3 = 1$$
    $$(\bar{t}+t)^4 = \bar{t}^4 + 4\,\bar{t}^3 t + 6\,\bar{t}^2 t^2 + 3\,\bar{t}\,t^3 + t^4 = 1$$
  - ⇒ Step 4: questi termini sono i pesi degli $n+1$ control points
- Esempi:
  - ⇒ Grado 2: $f(t) = \bar{t}^2\mathbf{p}_0 + 2\,\bar{t}\,t\,\mathbf{p}_1 + t^2\,\mathbf{p}_2$
  - ⇒ Grado 3: $f(t) = \bar{t}^3\mathbf{p}_0 + 3\,\bar{t}^2 t\,\mathbf{p}_1 + 3\,\bar{t}\,t^2\,\mathbf{p}_2 + t^3\mathbf{p}_3$
  - ⇒ Grado 4: $f(t) = \bar{t}^4\mathbf{p}_0 + 4\,\bar{t}^3 t\,\mathbf{p}_1 + 6\,\bar{t}^2 t^2\mathbf{p}_2 + 3\,\bar{t}\,t^2 + t^4\,\mathbf{p}_4$

Verificare anche per il grado 1

26

Curve Bézier cubiche: codice ottimizzato

```
vec3 bezier( in float t,
             in vec3 p0, in vec3 p1,
             in vec3 p2, in vec3 p3)
{
   float k = 1.0-t;
   return   (k*k*k)*p0 +
        (3.0*k*k*t)*p1 +
        (3.0*k*t*t)*p2 +
            (t*t*t)*p3 ;
}
```

27

Gli endpoint degli archi di Bèzier

- ✓ Gli endponits di arco di Bezier coincidono con il primo e l'ultimo punto di controllo (ma non dagli altri)
  - ⇒ E' banale verificare con le formule sopra!
  - ⇒ Gli endpoints sono con $t = 0 \;,\; \bar{t} = 1$ e con $t = 1 \;,\; \bar{t} = 0$
- ✓ Come sono le direz. tangenti nei due endpoints?
  - ⇒ Quanto vale la derivata f' nei punti parametrici t=0 e t=1
- ✓ La risposta (calcolando le derivate) è :
  - ⇒ all'inizio dell'arco, è sempre orientata come il vettore che connette il 1mo pt. di controllo al 2do
  - ⇒ alla fine dell'arco, è sempre orientata come il vettore che connette il penultimo pt. di controllo all'ultimo
- ✓ Vale per tutti i gradi (verificare per i gradi 1 e 2)

28

Curve di Bèzier cubiche

- ✓ Gli endponits di arco di Bèzier coincidono con il primo e l'ultimo punto di controllo (ma non dagli altri)
  - ⇒ E' banale verificare con le formule sopra!
  - ⇒ Gli endpoints sono con $t = 0$, $\bar{t} = 1$ e con $t = 1$, $\bar{t} = 0$
- ✓ Come sono le direz. tangenti nei due endpoints?
  - ⇒ Quanto vale la derivata f' nei punti parametrici t=0 e t=1
- ✓ La risposta (calcolando le derivate) è :
  - ⇒ all'inizio dell'arco, è sempre orientata come il vettore che connette il 1mo pt. di controllo al 2do
  - ⇒ alla fine dell'arco, è sempre orientata come il vettore che connette il penultimo pt. di controllo all'ultimo
- ✓ Vale per tutti i gradi (verificare per i gradi 1 e 2)

29

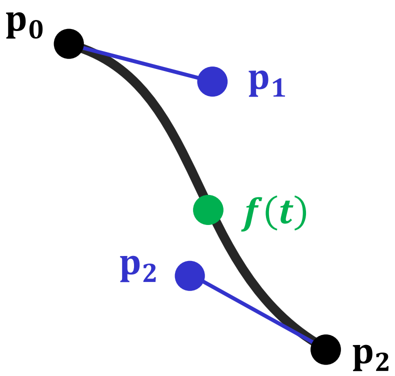
Curve di Bézier cubiche

- ✓ Il grado 3 (curva di Bézier cubiche) rappresenta il grado più conveniente da usare
- ✓ Ho quattro punti *distinti* che controllano la curva in modo intuitivo:
  - ⇒ Posizione e orientamento all'inizio (i primi due)
  - ⇒ Posizione e orientamento alla fine (gli ultimi due)
- ✓ Invece
  - ⇒ I gradi maggiori di 3 sono inutili e più difficili da manipolare, (cosa controlla il punto intermedio)?
  - ⇒ Coi gradi <3, non posso manipolare le due direzioni tangenti in modo indipendente una dall'altra
- ✓ Le curve cubiche sono ideali per fondere gli archi in una sola spline, detta «Bezièr curve» (o Bezièr path)
  - ⇒ Posso far coincidere le direzioni tangenti per ottenere una curva smooth

30

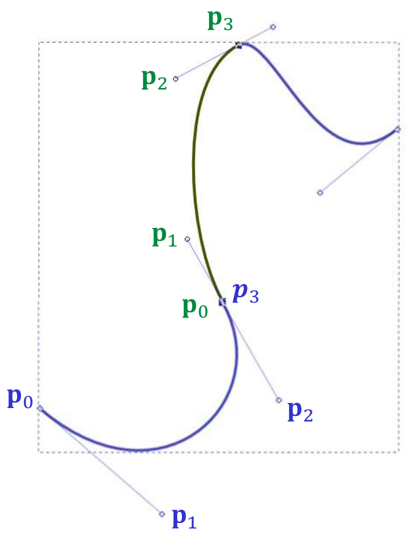
Bézier cubiche : recap

$$
\begin{aligned}
\boldsymbol{f}(\boldsymbol{t}) \quad = \quad & \quad\;\; (1-t)^3 \; \mathbf{p_0} \\
& + 3\,t \;\; (1-t)^2 \; \mathbf{p_1} \\
& + 3\,t^2 \; (1-t) \;\; \mathbf{p_2} \\
& + \;\; t^3 \qquad\qquad\;\; \mathbf{p_3}
\end{aligned}
$$



31

Concatenare archi Bezier arch: *Bezier curve (o path)*



Se end-points coincidono ($\mathbf{p}_3 = \mathbf{p}_0$): curva continua C0

Se, inoltre ($\mathbf{p}_2$, $\mathbf{p}_3 = \mathbf{v}_0$, $\mathbf{p}_1$) allineati:
curva continua
con direz di tangente continua
(curva “smooth” - “liscia”)

32

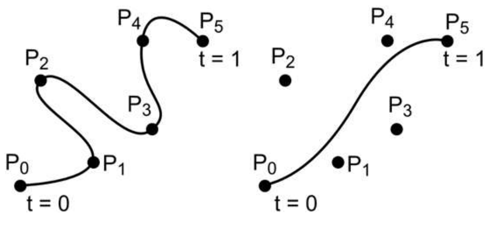
Curve di Bezier

- ✓ Usati per:
  - ⇒design 2D (molte applicazioni)
  - ⇒Formato SVG (per immagini vettoriali 2D)
    (è anche un formato standard del Web!)
  - ⇒specifica della forma delle lettere in un font
  - ⇒Ideale per path di animazione:
    basta specificare posizione e velocità in una serie di punti sul percorso!
- ✓ Programma Open Source per sperimentare:
  - ⇒Inkscape (http://inkscape.org)
  - ⇒Test: disegnare una curva
    (chiamata path in Inkskape),
    salvare il progetto in formato SVG,
    e analizzare il file risultante
    come file di testo

33

Curve paramteriche con punti di controllo

- ✓ La curve di Bèzier è solo un'esempio di schema
- ✓ In generale, uno schema consiste nel definire N punti di controllo e definire una curva che passa da questi punti (schema interpolativo) oppure ci si avvicina (schema approssimativo)



34

Superfici parametriche

✓ Siamo ora pronti per estendere le curve parametriche nelle superfici parametriche

$$f : \mathrm{A} \to \mathrm{B}$$

dominio parametrico — immagine di f

$\mathrm{A} \subseteq \mathbb{R}$ $\mathrm{B} \subseteq \mathbb{R}^2$	$\mathrm{A} \subseteq \mathbb{R}$ $\mathrm{B} \subseteq \mathbb{R}^3$	$\mathrm{A} \subseteq \mathbb{R}^2$ $\mathrm{B} \subseteq \mathbb{R}^3$
B è una curva parametrica nel piano	B è una curva parametrica nello spazio	B è una **superficie** parametrica nello spazio

35

Superficie Parametrica

$$f : \mathrm{A} \to \mathrm{B}$$

$\mathrm{A} \subseteq \mathbb{R}^2$ dominio parametrico

$\mathrm{B} \subseteq \mathbb{R}^3$ immagine di f

Superficie Parametrica:
immagine di una funzione da un dominio in R^2 a R^3

per definirne una, scegliere una funzione (e il suo dominio A) (il “dominio parametrico”)

$$f\begin{pmatrix} s \\ t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

“ x,y,z sono calcolate come formule di s,t ”

37

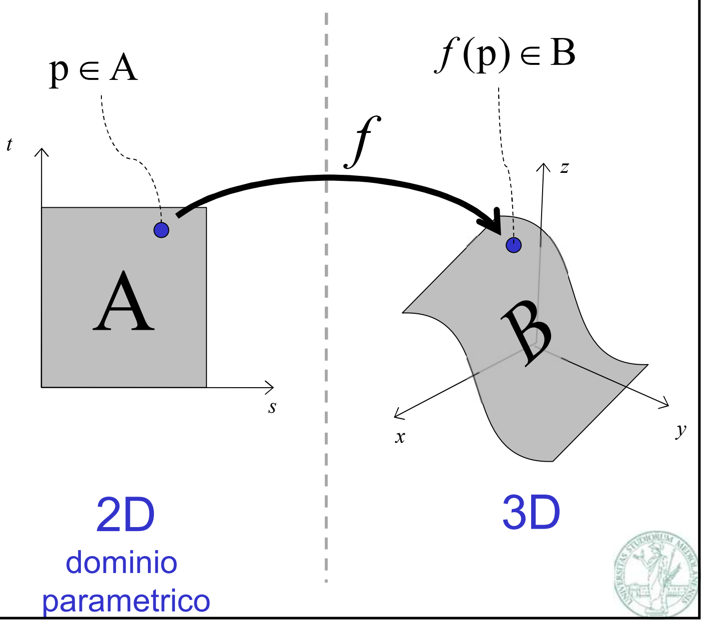
Superficie Parametrica

$f: \mathrm{A} \rightarrow \mathrm{B}$

$\mathrm{A} \subseteq \mathbb{R}^2$

$\mathrm{B} \subseteq \mathbb{R}^3$

$$f\begin{pmatrix} s \\ t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$



38

Sup. parametriche: convenzioni e terminologia

- ✓ A = Dominio Parametrico = il dominio di f
  - ⇒ Definito come regione di uno spazio bimensionale
  - ⇒ Spesso, per convenzione, definito come il quadrato [0..1]x[0..1]
  - ⇒ Per distinguere le sue coordinate da quelle usate come spazio oggetto (*x*,*y*,*z*), le chiamiamo *s*, *t* (a volte, *u* e *v*)
  - ⇒ Come per le tessiture!
- ✓ B = immagine di f
  - ⇒ Il luogo di punti raggiungibili da f a partire da A
  - ⇒ Costituisce la superficie parametrica

40

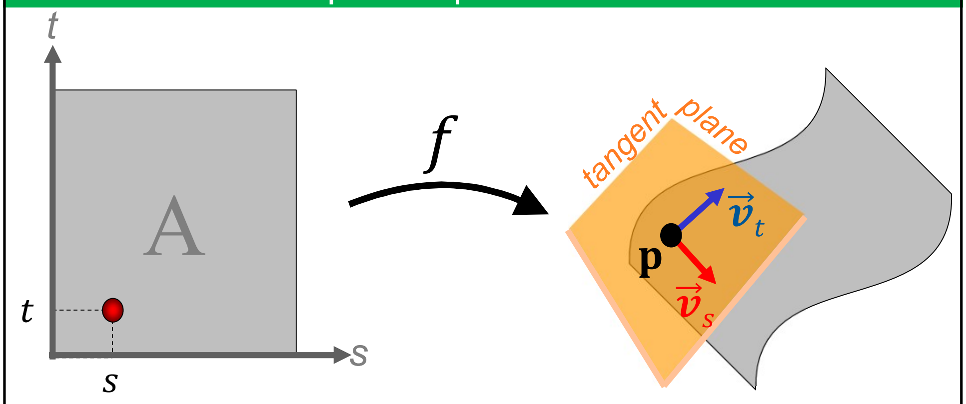
Normale di una superfice parametrica

$$f\begin{pmatrix} s \\ t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

- «Muovendomi» in direzione s e t sul dominio parametrico A, mi sposto sulla superficie B
- Posso derivare f sia rispetto a s, sia rispetto a t
  - ⇒Derivate "parziali" di f , $\partial f \,/\, \partial s$ e $\partial f \,/\, \partial t$
  - ⇒Sono gli spostamenti in 3D che effettuo incrementando s o t
- Ottenengo due vettori tangenti alla superficie
  - ⇒Quindi due vettori sul piano tangente alla superficie
- La normale della superficie in un punto è data dal prodotto cross fra questi due vettori! (rinormalizzato)

41

Normale di una superfice parametrica



$$\mathbf{p} = f\begin{pmatrix} s \\ t \end{pmatrix}$$

$$\vec{v}_s = \partial f \,/\, \partial s \begin{pmatrix} s \\ t \end{pmatrix}$$

$$\vec{v}_t = \partial f \,/\, \partial t \begin{pmatrix} s \\ t \end{pmatrix}$$

normale in $\mathbf{p}$:

$$\frac{\vec{v}_s \times \vec{v}_t}{\|\vec{v}_s \times \vec{v}_t\|}$$

42

Superficie parametriche e punti di controllo

- ✓ Come nel caso delle spline, una classe popolare di superfici parametriche è costituita
  - ⇒ $f\begin{pmatrix}s\\t\end{pmatrix}$ è una interpolazione lineari di un certo numero di punti 3D «di controllo»
  - ⇒ i pesi sono dati da polinomi (ora, in s e t), secondo una fomula prededetrminata
  - ⇒ Memorizzare la superficie consiste nel memorizzare i punti
- ✓ Posso usare lo schema di una qualsiasi spline per costruire il corrispondente «patch» (una superf.)
  - ⇒ Quindi esistono: patch di Beziér, patch NURBS, …
- ✓ Idea intuitiva: la superficie è un tessuto di linee parametriche
  - ⇒ come la trama e l'ordito in un tessuto

43

Bezier patches di grado N

- ✓ Ho una griglia di (N+1)×(N+1) pts di controllo…
  - ⇒ Es: con N = 2 ho: $p_{0,0}$ $p_{1,0}$ $p_{2,0}$
$p_{0,1}$ $p_{1,1}$ $p_{2,1}$
$p_{0,2}$ $p_{1,2}$ $p_{2,2}$
- ✓ Con N = 2, algoritmo per trovare $p = f(s,t)$
  - ⇒ cioè la pos 3D del punto di coord parametriche (s, t)
- ✓ procedo così:
  - ⇒ trovo a come $f(t)$ sulla bezier curve $p_{0,0}$ $p_{1,0}$ $p_{2,0}$
  - ⇒ trovo b come $f(t)$ sulla bezier curve $p_{0,1}$ $p_{1,1}$ $p_{2,1}$
  - ⇒ trovo c come $f(t)$ sulla bezier curve $p_{0,2}$ $p_{1,2}$ $p_{2,2}$
  - ⇒ trovo p come $f(s)$ sulla bezier curve a,b,c

44

Bezier patches grado 3 «Bi-cubic Bézier patches»

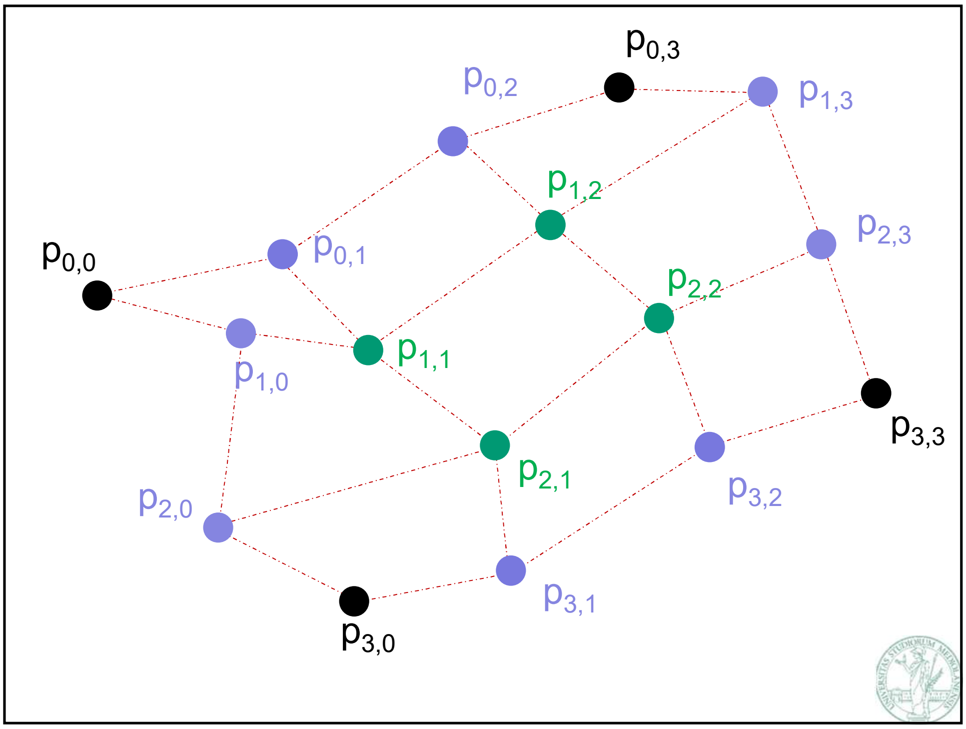
- Algoritmo per trovare $\mathrm{p} = f(s,t)$:
  - ⇒trovo a come $f(t)$ sulla bezier curve $\mathbf{p}_{0,0}$ $\mathbf{p}_{1,0}$ $\mathbf{p}_{2,0}$ $\mathbf{p}_{3,0}$
  - ⇒trovo b come $f(t)$ sulla bezier curve $\mathbf{p}_{0,1}$ $\mathbf{p}_{1,1}$ $\mathbf{p}_{2,1}$ $\mathbf{p}_{3,1}$
  - ⇒trovo c come $f(t)$ sulla bezier curve $\mathbf{p}_{0,2}$ $\mathbf{p}_{1,2}$ $\mathbf{p}_{2,2}$ $\mathbf{p}_{3,2}$
  - ⇒trovo d come $f(t)$ sulla bezier curve $\mathbf{p}_{0,3}$ $\mathbf{p}_{1,3}$ $\mathbf{p}_{2,3}$ $\mathbf{p}_{3,3}$
  - ⇒trovo p come $f(s)$ sulla bezier curve a,b,c,d
- Oppure, equivalentemente
  - ⇒trovo a come $f(s)$ sulla bezier curve $\mathbf{p}_{0,0}$ $\mathbf{p}_{0,1}$ $\mathbf{p}_{0,2}$ $\mathbf{p}_{0,3}$
  - ⇒trovo b come $f(s)$ sulla bezier curve $\mathbf{p}_{1,0}$ $\mathbf{p}_{1,1}$ $\mathbf{p}_{1,2}$ $\mathbf{p}_{1,3}$
  - ⇒trovo c come $f(s)$ sulla bezier curve $\mathbf{p}_{2,0}$ $\mathbf{p}_{2,1}$ $\mathbf{p}_{2,2}$ $\mathbf{p}_{2,3}$
  - ⇒trovo d come $f(s)$ sulla bezier curve $\mathbf{p}_{3,0}$ $\mathbf{p}_{3,1}$ $\mathbf{p}_{3,2}$ $\mathbf{p}_{3,3}$
  - ⇒trovo p come $f(t)$ sulla bezier curve a,b,c,d

45

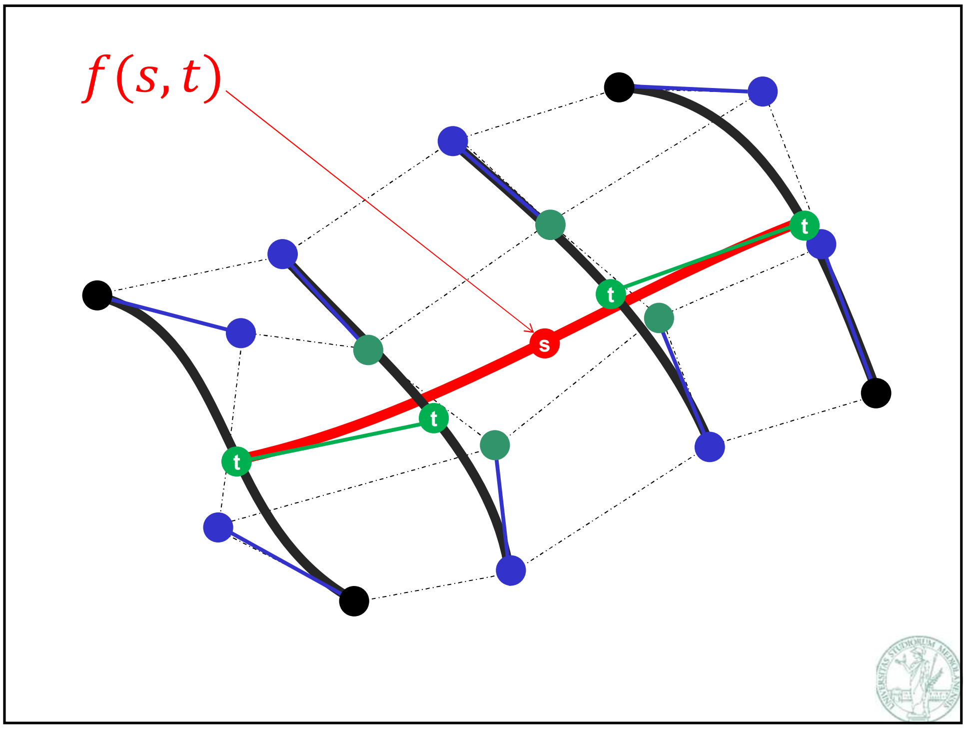
Bezier patches grado 3 «Cubic Bézier patches»

- N = 3
- Griglia di 4x4 vertici di controllo
  - ⇒ $p_{0,0}$ $p_{1,0}$ $p_{2,0}$ $p_{3,0}$
    $p_{0,1}$ $p_{1,1}$ $p_{2,1}$ $p_{3,1}$
    $p_{0,2}$ $p_{1,2}$ $p_{2,2}$ $p_{3,2}$
    $p_{0,3}$ $p_{1,3}$ $p_{2,3}$ $p_{3,3}$
- Passa per i 4 angoli (è interpolante su loro)
  p0,0 p0,3 p3,0 p3,3
- E' approssimante sugli altri punti
- E detto anche «Bi-Cubico» perché è cubico sia sulla s, che sulla t

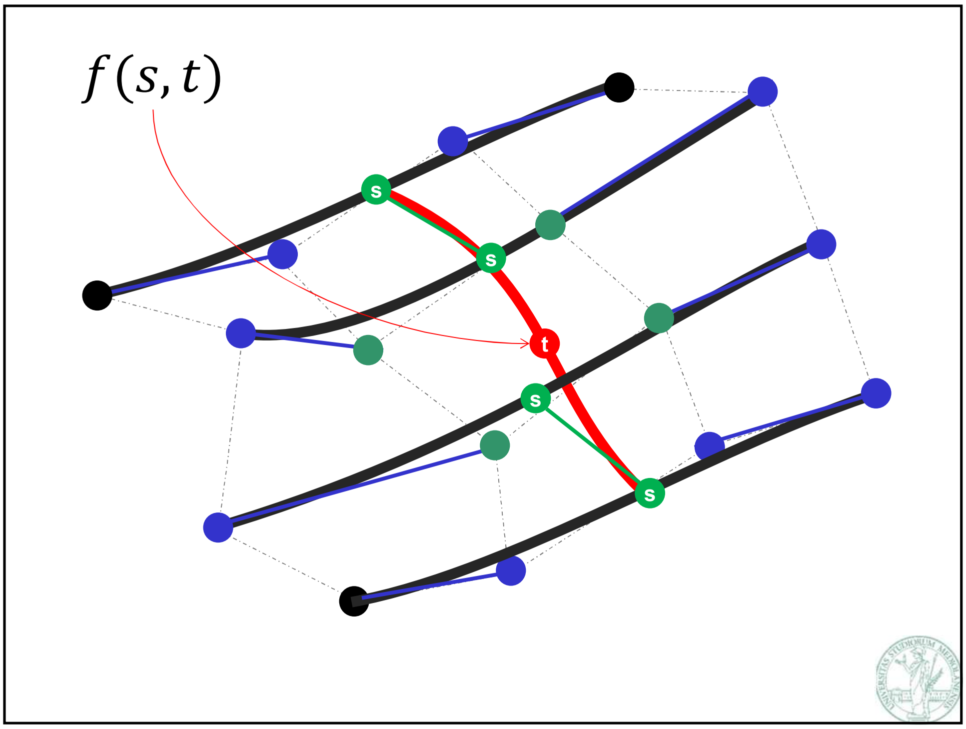
46


p0,3
p0,2
p1,3
p1,2
p2,3
p0,0
p0,1
p2,2
p1,1
p1,0
p3,3
p2,1
p3,2
p2,0
p3,1
p3,0

47

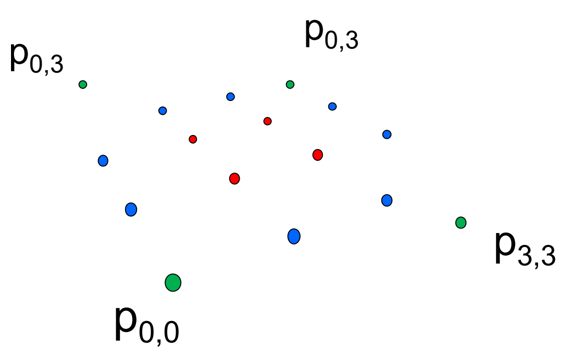

$f(s,t)$
t
t
s
t
t

48



49

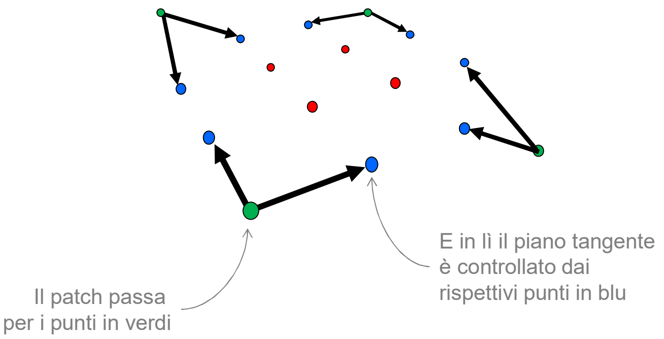
Bi-cubic Bézier patches: esempio



4x4 punti di controllo

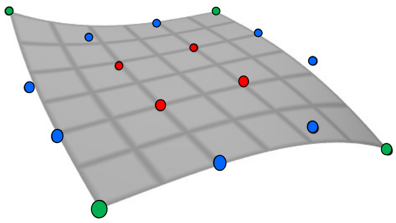
51

Bi-cubic Bézier patches



52

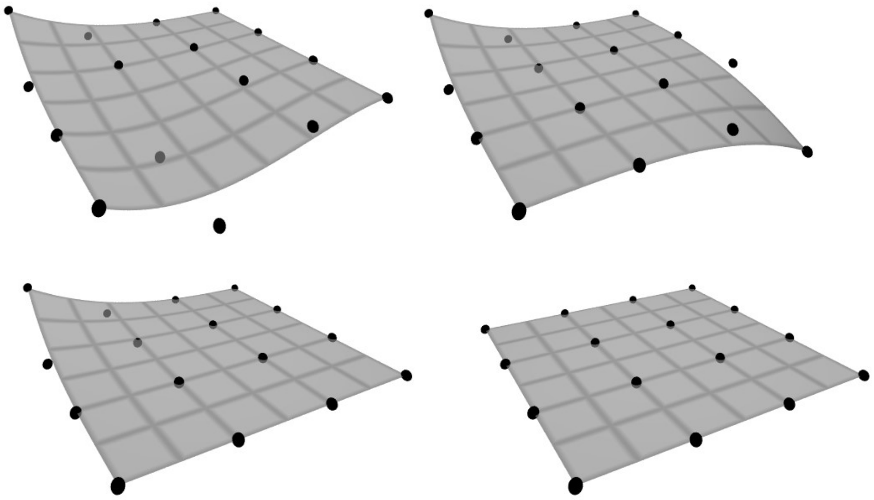
Bi-cubic Bézier patches



Patch di bezier

53

Cubic Bézier patches: esempi



Modificando I punti di controllo, modifico il patch

http://kovacsv.github.io/JSModeler/documentation/examples/bezier.html

54

Superfici di bezier

✓ Così come una curva (o un path) di Bézier è costituito da molti archi connessi, una superficie di Bézier è costituita da molti patch connessi sui loro lati
  - ⇒Nuovamente, il matching dei punti di controllo sul bordo garantisce che la superficie sia continua, senza gaps
  - ⇒Inoltre, imporre la colinearità fra i punti di controllo interni garantisce che la superficie non abbia crease (discontinuità di normale), cioè che sia smooth (lisca) – se questo è desiderato!

55

Lo zoo delle superfici parametriche

- ✓ Anche gli altri tipi di splines sono estendibili a patch, nello stesso modo:
  - ⇒ Hermite Splines
  - ⇒ Bezier splines
  - ⇒ B-splines
  - ⇒ NURBS
- ✓ Le NURBS in particolare sono molto utilizzate

56

Superifici parametriche: benefici

- ✓ Controllabili, intuitive da modellare, ottime per il design
  - ⇒ Queste superfici so ideali per il design
  - ⇒ Soprattutto di tipo industriale / artificiale (CAID – Computer-aided industrial design)
  - ⇒ Controllo di curvatura e normale
- ✓ E' una rappresentazione compatta ed espressiva
  - ⇒ Basta memorizzare pochi pts di controllo
  - ⇒ Rappresentazione matematica di superfici dalla geometria *realmente* curva
  - ⇒ Paragona: mesh: lineari a tratti (curvatura solo simulata con normali o normal map)
- ✓ Risoluzione: numero di patch che compone la sup
  - ⇒ equivalentemente a meno di fattore, del num. di pt. controllo
  - ⇒ E' una res adattiva!

57

Superfici parametriche : benefici

- ✓ La superficie «nasce» già con un dominio parametrico e un mapping incluso nella sua definizione
  - ⇒ per es, è triviale applicare il texture mapping ad un patch
  - ⇒ paragona col caso Mesh: parametrizzazione difficile
- ✓ Sono intuitive da manipolare per il designer del modello
  - ⇒ Esempio: la teiera dello Utha, Il famoso modello 3D, simbolo della Computer Graphic, è stato costruito (anni '70) come superficie di Bézier completamente «a mano», scrivendo i punti di controllo con carta e penna su un foglio (guardando una teiera fisica)
  - ⇒ Oggi, moltissime suite di modellazione 3D sono basate o includono superfici parametriche (NURBS, di Bézier, e/o altro)
  - ⇒ Es: Rhinoceros3d, Autodesk Alias, moi3D, Blender, Solidworks

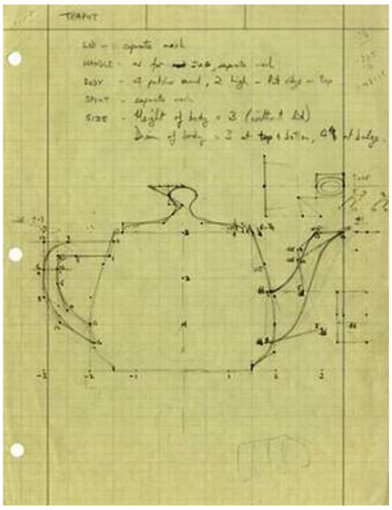
Aka «Alias StudioTools»

Rhinoceros

tool specializzati

58

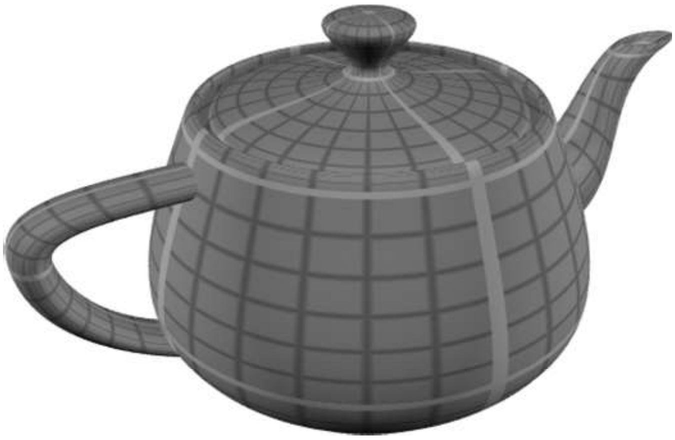
Bézier patches: per il design



The Utah Teapot, by Martin Newell (1975)

59

Bézier patches: utili per il desing



The Utah Teapot, by Martin Newell (1975)

60

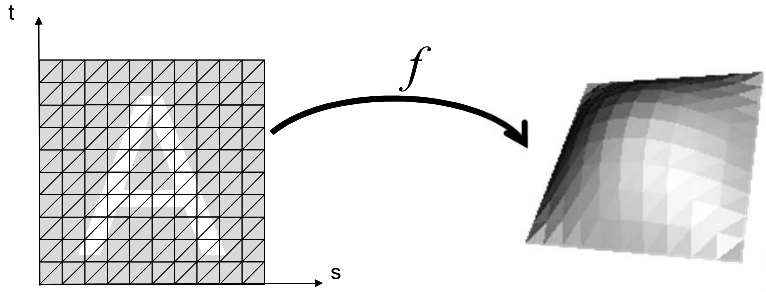
Processing su una superficie parametrica

- ✓ In molti contesti, la superficie parametrica è l'input o l'output diretto di task di geometry processing, incluso:
  - ⇒ Semplificazione: riduzione del numero di patch
  - ⇒ Costruzione automatica (a partire da un'altra rappresentazione, quale una mesh). Task difficile.
- ✓ Per molti usi, compreso (spesso) il rendering, è necessario, viceversa convertire la superficie parametrica in una mesh poligonale
  - ⇒ Fortunatamente, questo procedimento è semplice
  - ⇒ Nota: può essere fatto «on demand», per es solo in fase di rendering, usando la rappresentazione originale (assai più compatta) per lo storing del modello 3D e qualsiasi altro uno

61

Da superficie parametrica a mesh poligonale

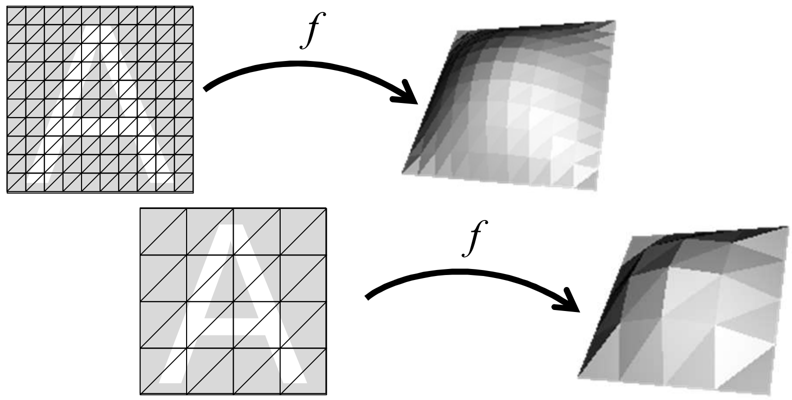
- ✓ Banale: campiono il dominio parametrico A su una griglia regolare (es.: 10x10)
  - ⇒ (s,t) = (0.0,0.0), (0.1,0.0), … (0.0,0.1), (0.1,0.1)… , (1.0, 1.0)
- ✓ Per ogni posizione campionata (s,t)
  - ⇒ creo un vertice della mesh nel punto $f(s,t)$
  - ⇒ doto ogni vertice della sua normale, ottenuta con le derivate di f
- ✓ Creo triangoli che connettono i vertici nel modo banale
- ✓ Risultato: mesh regolare!



63

Da superficie parametrica a mesh

- ✓ Osservazione: quanto densamente tassellare può essere deciso liberamente, anche in fase di rendering
  - ⇒ La superficie rappresentata è curva: solo durante il rendering la approssimiamo con superfici poligonate



64