

Marco Tarini - Computer Graphics 2019/2020  
Università degli Studi di Milano


## trasformazioni spaziali



2

### Fase per vertice (Transform)


✓ Per ogni vertice di un modello:



coordinate in cui sono definiti i vertici dell'oggetto ("object coords")

screen Coordinates

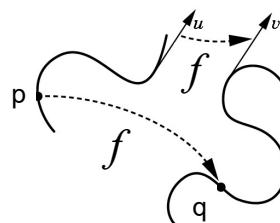
- Si tratta di una "trasformazione spaziale"
  - dallo spazio oggetto 3D, in cui sono definiti i vertici della mesh,
  - ad uno spazio 2D sullo schermo
- Occupiamoci dunque di "trasformazioni spaziali"



3

## Trasformazioni geometriche (o spaziali)

- ✓ Funzioni che
  - ⇒ prendono un punto / vettore
  - ⇒ lo mappano in un altro punto / vettore



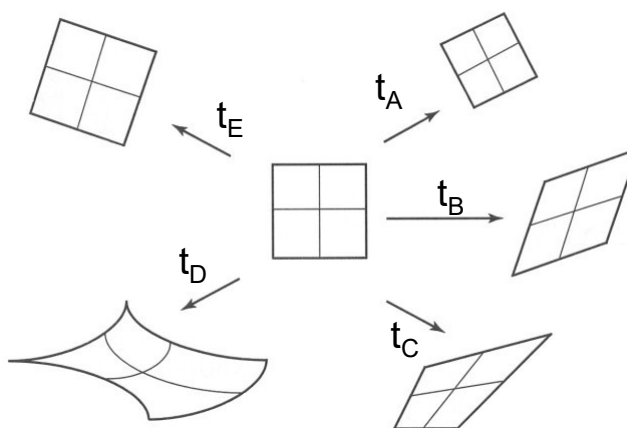
$$q = f(p)$$
$$v = f(u)$$

Se input è un punto, output è un punto.  
Se input è un vettore, output è un vettore



4

## Trasformazioni spaziali: in generale



- ✓ Vediamo alcune classi utili di trasformazioni



5

### Esempio: Trasformazione di Traslazione

$$f \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \alpha_x \\ \alpha_y \\ \alpha_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x + \alpha_x \\ y + \alpha_y \\ z + \alpha_z \end{pmatrix}$$

vettore di traslazione

6

### Esempio: Trasformazione di Traslazione

✓ Osservazioni:


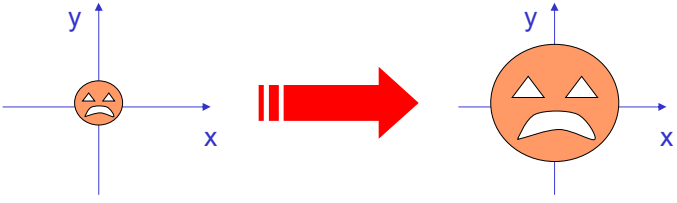
- ⇒ i punti vengono traslati
  - es: le posizioni dei vertici della mesh
- ⇒ **ma i vettori devono rimanere invariati**
  - es: le normali alla superficie
    - la direzione: «da che parte guarda la faccia»
    - il vettore «distanza fra gli occhi»
  - non subiscono cambiamenti dopo la traslazione

$$f \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x + \alpha_x \\ y + \alpha_y \\ z + \alpha_z \end{pmatrix} \quad \text{per punti}$$

$$f \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \quad \text{per vettori}$$

7

Altro Esempio:  
**Trasformazione di Scalatura (uniforme)**


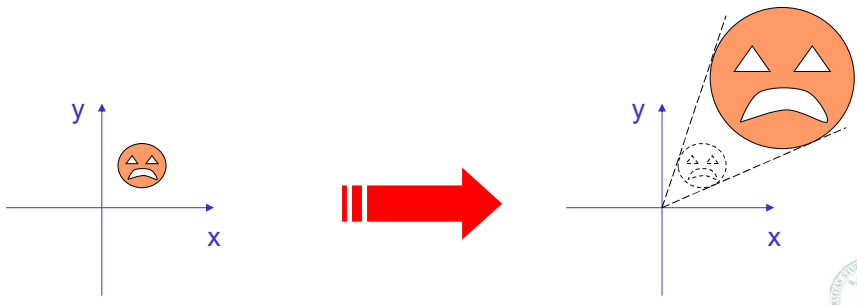
$$f \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \gamma \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \gamma \cdot x \\ \gamma \cdot y \\ \gamma \cdot z \end{pmatrix}$$


8

**Esempio: trasformazione di scalatura (uniforme)**

nota: stesso effetto su punti e vettori  
(es: il vettore "distanza fra gli occhi" viene scalato)

nota: applicata ai punti  
"scala" anche la distanza dall'origine



9

### Esempio: trasformazione di scalatura (uniforme)

- ✓ Detta «**uniforme**» o «**isotropica**» perché applica lo stesso rapporto di scala a tutte e tre le coordinate
  - ⇒ quindi i vettori vengono scalati di una stessa quantità, indipendentemente dalla loro direzione
  - ⇒ vale non solo per vettori allineati all'asse X, Y o Z, ma anche per vettori orientati in qualsiasi direzione
  - ⇒ Terminologia (in generale):
    - Invarianza rispetto alla direzione = «**isotropia**»
    - Dipendenza dalla direzione = «**anisotropia**»

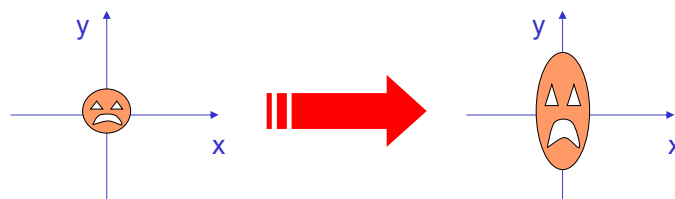


10

### Esempio: trasformazione di scalatura (generica)

$$f \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \gamma_x \\ \gamma_y \\ \gamma_z \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \gamma_x \cdot x \\ \gamma_y \cdot y \\ \gamma_z \cdot z \end{pmatrix}$$

prodotto **componente per componente**  
"component-wise product"  
(non un'operazione canonica)



11

## Trasformazione di Scalatura generica

✓ Osservazioni:

- ⇒ Si applica tanto a punti che a vettori
  - (es: se ingrandisco un dinosauro – tutti i punti che lo definiscono, allora ingrandisco anche il vettore che connette la sua coda alla sua testa)
- ⇒ Fattori di scala inferiori a 1 avvicinano i punti all'origine del sistema di riferimento
- ⇒ Fattori di scala maggiori di 1 lo allontanano
- ⇒ L'unico punto che viene mappato su se stesso è l'origine



12

## Trasformazione di Scalatura generica

✓ Se  $s_x = s_y = s_z$  le proporzioni dell'oggetto sono mantenute.

La scalatura viene detta

- ⇒ **uniforme** ( $x$ ,  $y$  e  $z$  sono soggetti a fattori uniformi)
- ⇒ o **conformale** (mantiene la «forma»)
- ⇒ o **isotropica** («una direzione vale l'altra»)
  - infatti non solo i vettori in dir  $x$ ,  $y$ , e  $z$  subiscono un allungamento di  $s_x$ , ma anche quelli in qualsiasi altra direzione (verificare!)

✓ Altrimenti, le proporzioni **non** sono mantenute.

La scalatura viene detta

- ⇒ **non uniforme**
- ⇒ o **non conformale** (non mantiene la forma, deforma)
- ⇒ o **anisotropica** («dipende dalla direzione»)



13

**Esempio in 2D:  
 trasf. di rotazione di 90 gradi senso antiorario**

$f \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -y \\ x \end{pmatrix}$

14

**In 3D:  
 trasf. di rotazione di 90 gradi attorno all'asse delle z**

$f \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -y \\ x \\ z \end{pmatrix}$


15

### Rappresentazione di punti e vettori in coordinate **omogenee**

**Punti:**

$$\mathbf{1} \rightarrow \mathbf{p} = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ 1 \end{bmatrix}$$

**Vettori:**

$$\mathbf{0} \rightarrow \vec{\mathbf{v}} = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ 0 \end{bmatrix}$$


16

### Rappresentazione di punti e vettori in coordinate **omogenee**

- ✓ Un **punto** di **coordinate cartesiane** (x,y,z) è rappresentato in **coordinate omogenee** come (x,y,z,**1**)
- ✓ Un **vettore** di **coordinate cartesiane** (x,y,z) è rappresentato in **coordinate omogenee** come (x,y,z,**0**)
- ✓ Nota: (da verificare!)  
questo è coerente con l'algebra di punti e vettori :  
punto – punto = vettore  
punto + vettore = punto



17



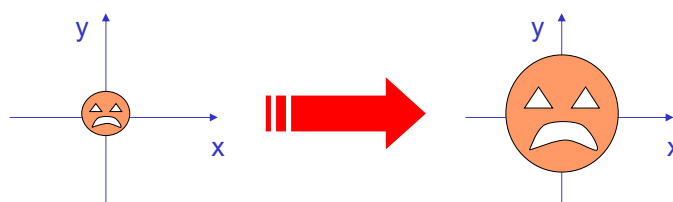
## Trasformazioni come moltiplicazioni per matrici

- ✓ Esprimendo punti e vettori in coordinate omogenee (in un vettori colonna), possiamo esprimere le trasformazioni viste come una moltiplicazione di una matrice 4x4 detta la sua matrice di trasformazione
  - ⇒ Questo varrà anche per tutte le altre trasformazioni che vedremo



18

## Matrice di trasformazione: scaling isotropico



$$f \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \gamma x \\ \gamma y \\ \gamma z \\ 1 \end{pmatrix} \quad \begin{bmatrix} \gamma & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \gamma & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \gamma & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \gamma x \\ \gamma y \\ \gamma z \\ 1 \end{bmatrix}$$

$S_\gamma$   
 matrice di scaling  
 isotropico

Cosa succede se la applico  $S_\gamma$  ad un vettore?




19

**Matrice di trasformazione:  
scaling anisotropico**

$$f \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \gamma_x x \\ \gamma_y y \\ \gamma_z z \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} \gamma_x & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \gamma_y & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \gamma_z & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \gamma_x x \\ \gamma_y y \\ \gamma_z z \\ 1 \end{bmatrix}$$

$S_{\gamma_x, \gamma_y, \gamma_z}$   
matrice di scaling  
anisotropico




20

**Matrice di trasformazione:  
rotazione all'asse delle Z**

$$f \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -y \\ x \\ z \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -y \\ x \\ z \\ 1 \end{bmatrix}$$

$R_{z, 90^\circ}$   
matrice di rotazione  
di  $90^\circ$  attorno all'asse delle Z



21