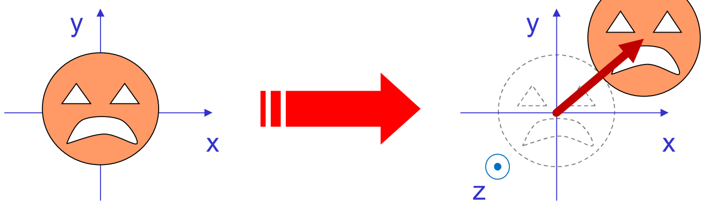
Matrice di trasformazione: traslazione

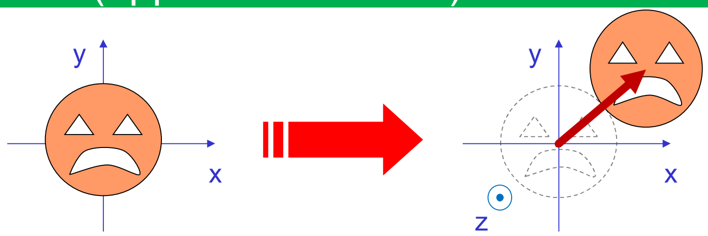


$$f\begin{pmatrix}x\\y\\z\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}x+t_x\\y+t_y\\z+t_z\\1\end{pmatrix}\qquad\begin{bmatrix}1&0&0&t_x\\0&1&0&t_y\\0&0&1&t_z\\0&0&0&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x\\y\\z\\1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}x+t_x\\y+t_y\\z+t_z\\1\end{bmatrix}$$

$\mathbf{T}_{t_x,t_y,t_z}$

matrice di traslazione
del vettore t $= (t_x, t_z, t_z)$

Matrice di trasformazione: traslazione (applicate ai vettori)



$$f\begin{pmatrix}x\\y\\z\\0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}x+t_x\\y+t_y\\z+t_z\\0\end{pmatrix}\qquad\begin{bmatrix}1&0&0&t_x\\0&1&0&t_y\\0&0&1&t_z\\0&0&0&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x\\y\\z\\0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}x\\y\\z\\0\end{bmatrix}$$

la stessa matrice applicata ad un **vettore** lo lascia invariato (come ci aspettiamo da una traslazione)

$\mathbf{T}_{t_x,t_y,t_z}$

matrice di traslazione
del vettore t $= (t_x, t_y, t_z)$

Matrice di trasformazione: traslazione

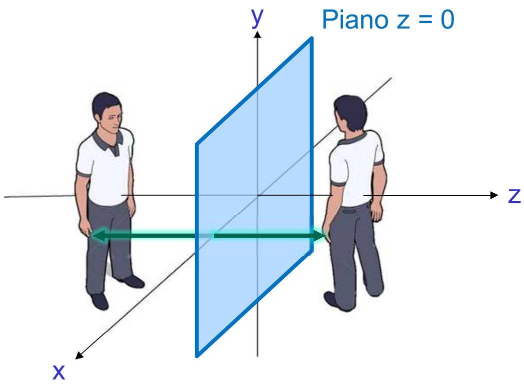
cosa succede quando la applico ad un *vettore* ?

$$f\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & \alpha_x \\ 0 & 1 & 0 & \alpha_y \\ 0 & 0 & 1 & \alpha_z \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ 0 \end{pmatrix}$$

coerentemente con il comportamento atteso,
il vettore sottoposto alla traslazione
rimane invariato

24

Matrice di simmetria speculare (planare)



$$f\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ -z \end{pmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x \\ y \\ -z \\ 1 \end{bmatrix}$$

25

Alcune trasformazioni affini utili espresse attraveso le loro matrici

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & t_x \\ 0 & 1 & 0 & t_y \\ 0 & 0 & 1 & t_z \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$\mathbf{T}_{t_x,t_y,t_z}$

matrice di traslazione del vettore $\mathbf{t} = (t_x, t_y, t_z)$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$\mathbf{M}_z$

matrice di simmetria del piano $z = 0$

$$\begin{bmatrix} \gamma_x & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \gamma_y & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \gamma_z & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$\mathbf{S}_{\gamma_x,\gamma_y,\gamma_z}$

matrice di scaling anisotropico

$$\begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$\mathbf{R}_{z,90°}$

matrice di rotazione di 90° attorno all'asse delle z

27

Inversa della matrice di scalatura

matrice di traslazione:

$$\mathbf{S}_{\gamma_x,\gamma_y,\gamma_z} = \begin{bmatrix} \gamma_x & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \gamma_y & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \gamma_z & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

l'inversa è, logicamente:

$$(\mathbf{S}_{\gamma_x,\gamma_y,\gamma_z})^{-1} = \mathbf{S}_{1/\gamma_x,1/\gamma_y,1/\gamma_z} = \begin{bmatrix} 1/\gamma_x & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1/\gamma_y & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1/\gamma_z & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

28

Inversa della matrice di traslazione

matrice di traslazione: $\mathbf{T}(\alpha_x, \alpha_y, \alpha_z) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & \alpha_x \\ 0 & 1 & 0 & \alpha_y \\ 0 & 0 & 1 & \alpha_z \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

l'inversa è, logicamente:

$$\mathbf{T}^{-1}(\alpha_x, \alpha_y, \alpha_z) = \mathbf{T}(-\alpha_x, -\alpha_y, -\alpha_z) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & -\alpha_x \\ 0 & 1 & 0 & -\alpha_y \\ 0 & 0 & 1 & -\alpha_z \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

29

Inversa di matrice di simmetria speculare

matrice di traslazione: $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

l'inversa è, logicamente, la matrice stessa

30

Rotazioni in 3D: note

- ✓ In 3D,
  bisogna specificare attorno a quale asse ruotare
  - ⇒oltre che, di quanti gradi,
    e in se in senso orario o antiorario
- ✓ Si applica tanto ai punti quanto ai vettori
  - ⇒la stessa funzione viene applicata alle loro coordinate
- ✓ I punti sull'asse vengono mappati su se stessi
  - ⇒e così i vettori paralleli all'asse
- ✓ Attenzione: cumulare rotazioni in 3D non commuta!
  - ⇒Es: ruotare attorno a X di 90° e poi a Y di 90°
    non è la stessa cosa di
    ruotare attorno a Y di 90° e poi a X di 90°

34

Trasformazioni Affini (o lineari)

- ✓ Una classe di trasformazioni particolarmente utile in Computer Graphics
  - ⇒(quasi) tutte le trasformazioni spaziali che ci interessano appartengono a questa classe
- ✓ Comprende tutte le trasformazioni che abbiamo visto fin'ora
  - ⇒(traslazione, scalature uniformi e non, rotazioni…)
  - ⇒E altre
- ✓ Vediamo un modo per gestirle uniformemente
  - ⇒cioè attraverso moltiplicazioni con matrice

35

Trasformazioni Affini

✓ Quelle che posso esprimere come moltiplicazione con matrice 4x4 :

$$f\begin{pmatrix}\gamma_1\\\gamma_2\\\gamma_3\\1\end{pmatrix}=\begin{bmatrix}\alpha_{11}&\alpha_{12}&\alpha_{13}&\alpha_{14}\\\alpha_{21}&\alpha_{22}&\alpha_{23}&\alpha_{24}\\\alpha_{31}&\alpha_{32}&\alpha_{33}&\alpha_{34}\\\underbrace{0\quad 0\quad 0\quad 1}_{\text{sempre}}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\gamma_1\\\gamma_2\\\gamma_3\\1\end{bmatrix}=\begin{pmatrix}\delta_1\\\delta_2\\\delta_3\\1\end{pmatrix}$$

punto di partenza in coordinate affini

punto di arrivo in coordinate affini

38

Trasformazioni Affini

✓ Quelle che posso esprimere come moltiplicazione con matrice 4x4 :

conta solo questo

$$f\begin{pmatrix}\gamma_1\\\gamma_2\\\gamma_3\\0\end{pmatrix}=\begin{bmatrix}\alpha_{11}&\alpha_{12}&\alpha_{13}&\alpha_{14}\\\alpha_{21}&\alpha_{22}&\alpha_{23}&\alpha_{24}\\\alpha_{31}&\alpha_{32}&\alpha_{33}&\alpha_{34}\\\underbrace{0\quad 0\quad 0\quad 1}_{\text{sempre}}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\gamma_1\\\gamma_2\\\gamma_3\\0\end{bmatrix}=\begin{pmatrix}\delta_1\\\delta_2\\\delta_3\\0\end{pmatrix}$$

vettore di partenza in coordinate affini

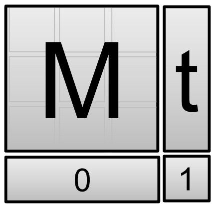
vettore di arrive in coordinate affini

39

Trasformazioni affini come matrici 4x4

✓ Ad una qualsiasi trasformazione affine corrisponde una matrice 4x4 :

Questa sottomatrice 3x3 si applica alle coord cartesiane sia dei punti che dei vettori



Matrice 4x4

Questo vettore t si somma quando trasformo punti (ma viene azzerato quando trasformo vettori).

Ultima riga: (0,0,0,1)
Così che i punti vengano mappati sempre in punti, e i vettori sempre in vettori

46

Trasformazioni affini come matrici 4x4

✓ Matrice identità: trasformazione identità
⇒(trasforma ogni punto o vettore in se stesso)

✓ Matrice inversa: trasformazione inversa
⇒(se esiste)

✓ Determinante della matrice 4x4 = Determinante della sottomatrice 3x3 = Moltiplicatore del volume

47

Inversione di una matrice di trasformazione affine

- ✓ Potremmo applicare un algoritmo generico di inversione di matrici 4x4
- ✓ Possiamo sfruttare l'ipotesi che l'ultima riga è (0,0,0,1) per semplificare il conto
  - ⇒ il prob si riduce all'inversione di una matrice 3x3
- ✓ Molte delle matrici di trasf. utili sono casi particolari che ammettono metodi molto più semplici (ed efficienti) per calcolarne l'inversa
  - ⇒ inclusi i caso per:
    traslazione, scalatura, rotazione…

49

Eseguire sequenze di trasformazioni

- ✓ Le trasf affini sono chiuse per composizione.

…infatti…

- ✓ La moltiplicazione è associativa

$$\mathrm{M_A} \cdot (\mathrm{M_B} \cdot \mathrm{p}) = (\mathrm{M_A} \cdot \mathrm{M_B}) \cdot \mathrm{p}$$

  - ⇒ La matrice $\mathrm{M_A}$ «fa» una data trasf f_A
  - ⇒ La matrice $\mathrm{M_B}$ «fa» una data trasf f_B
  - ⇒ La matrice $(\mathrm{M_A} \cdot \mathrm{M_B})$ «fa» la trasf f_B, seguita da f_A

- ✓ Due (oppure n) trasformazioni al prezzo di una!

50

Trasf. di rotazione in 2D generica
(attorno all'origine, di un angolo β **generico**, in senso antiorario)

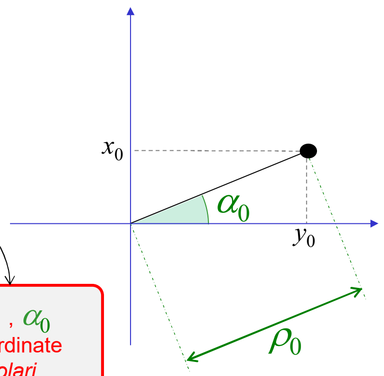
preliminare:coordinate polari
(un modo diverso per
esprimere punti / vettori in 2D)

$$\rho_0 = \sqrt{x_0^{\,2} + y_0^{\,2}}$$
$$\alpha_0 = atan2(\, y_0 \,,\, x_0 \,)$$

$x_0\ ,\ y_0$
coordinate *catersiane*

$\rho_0\ ,\ \alpha_0$
coordinate *polari*

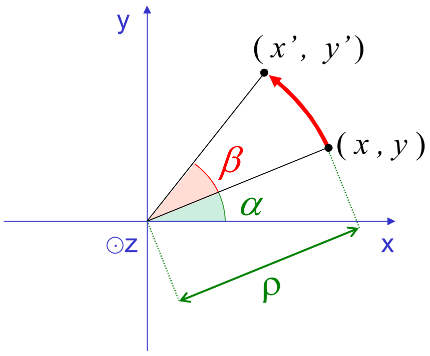
$$x_0 = \rho_0 \cdot \cos(\alpha_0)$$
$$y_0 = \rho_0 \cdot \sin(\alpha_0)$$



51

Trasf. di rotazione in 2D
(attorno all'origine, di un angolo β **generico,** in senso antiorario)

In coordinate polari,
la rotazione sarebbe banale:
l'angolo α incrementa di β,
la distanza ρ rimane invariata



partenza:
$$x = \rho \cos \alpha$$
$$y = \rho \sin \alpha$$

arrivo:
$$x' = \rho \cos(\alpha + \beta) = \rho \cos \alpha \cos \beta - \rho \sin \alpha \sin \beta = x \cos \beta - y \sin \beta$$
$$y' = \rho \sin(\alpha + \beta) = \rho \cos \alpha \sin \beta + \rho \sin \alpha \cos \beta = x \sin \beta + y \cos \beta$$

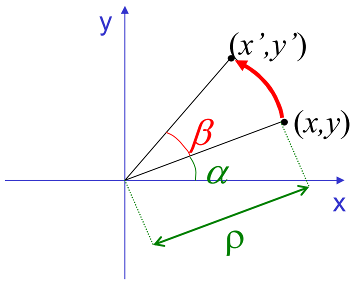
52

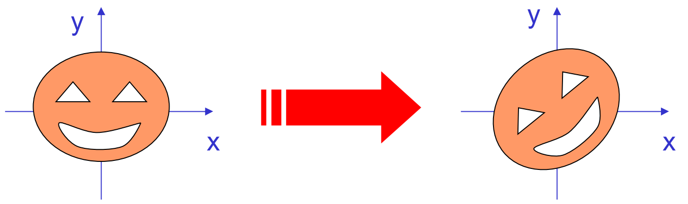
Trasf. di rotazione in 2D
(attorno all'origine, di un angolo β **generico**, in senso antiorario)

Quindi:

$$f\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x\cos\beta - y\sin\beta \\ x\sin\beta + y\cos\beta \end{pmatrix}$$

alla fine, il passaggio alle coord polari non serve :-)
bastano il valore di seno e coseno dell'angolo di rotazione β



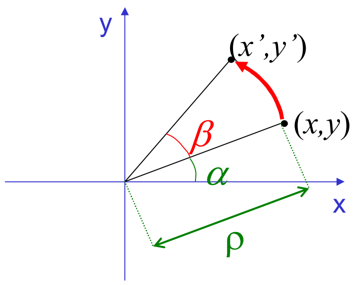


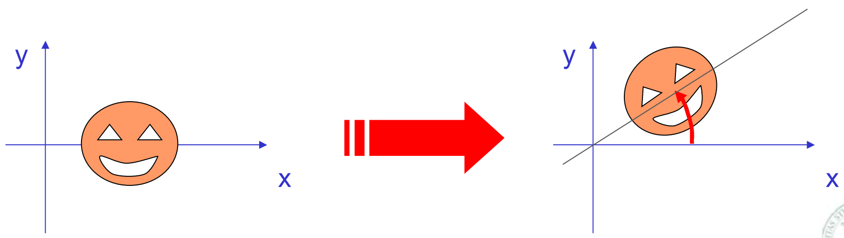
53

Trasf. di rotazione in 2D
(attorno all'origine, di un angolo β **generico**, in senso antiorario)

$$f\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x\cos\beta - y\sin\beta \\ x\sin\beta + y\cos\beta \end{pmatrix}$$

Nota: questa trasformazione
ruota attorno all'origine degli assi
(non certo attorno al centro delle figure)

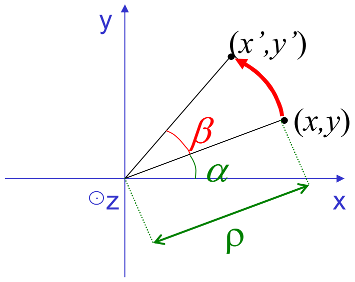


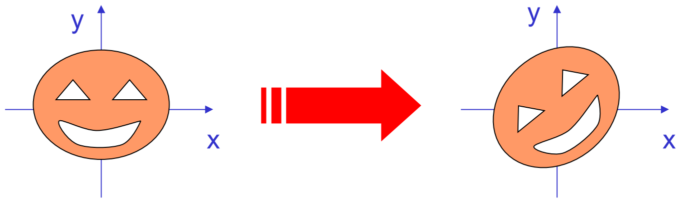


54

Trasf. di rotazione 3D attorno all'asse z (di un angolo β)

$$f\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x\cos\beta - y\sin\beta \\ x\sin\beta + y\cos\beta \\ z \end{pmatrix}$$



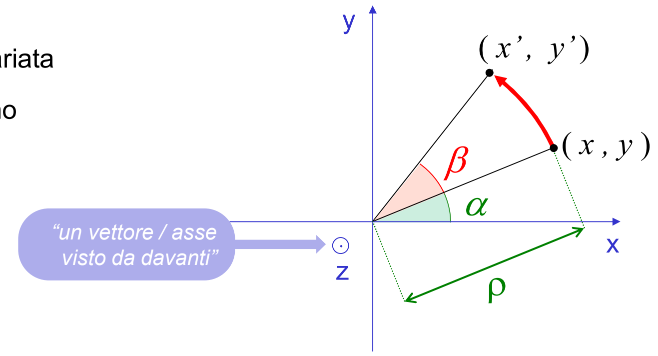


55

Torniamo in 3D: Trasf. di rotazione attorno all'asse z (di un angolo β)

z rimane invariata

x e y ruotano



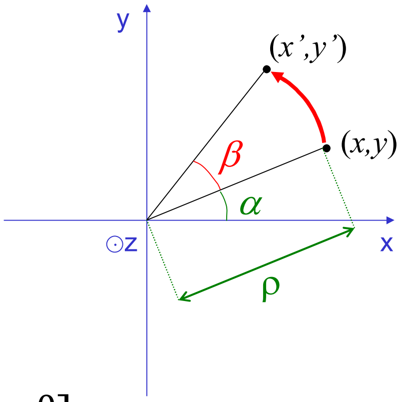
$$f\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x\cos\beta - y\sin\beta \\ x\sin\beta + y\cos\beta \\ z \end{pmatrix}$$

56

Rotazione 3D attorno all'asse z… come moltiplicazione con matrice

$$x' = x\cos\beta - y\sin\beta$$
$$y' = x\sin\beta + y\cos\beta$$
$$z' = z$$

$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \\ z' \\ 1 \end{bmatrix} = R_{Z(\beta)} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x\cos\beta - y\sin\beta \\ x\sin\beta + y\cos\beta \\ z \\ 1 \end{bmatrix}$$

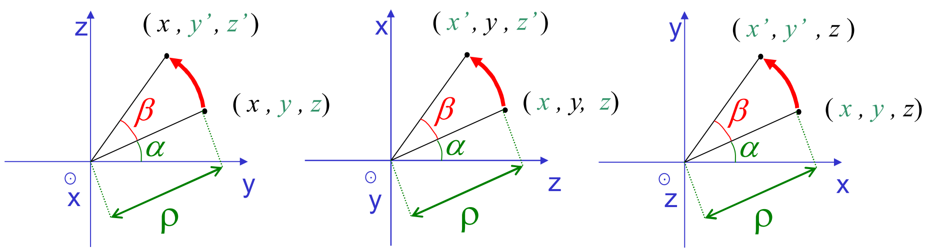


$$R_{Z(\beta)} = \begin{bmatrix} \cos\beta & -\sin\beta & 0 & 0 \\ \sin\beta & \cos\beta & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

57

Trasf. di rotazione attorno ad uno dei tre assi

Attorno ad ASSE X | Attorno ad ASSE Y | Attorno ad ASSE Z



$$f\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y\cos\beta - z\sin\beta \\ y\sin\beta + z\cos\beta \end{pmatrix} \qquad f\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} z\cos\beta - x\sin\beta \\ y \\ z\sin\beta + x\cos\beta \end{pmatrix} \qquad f\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x\cos\beta - y\sin\beta \\ x\sin\beta + y\cos\beta \\ z \end{pmatrix}$$

58

Matr di Rotazione attorno all'asse x, y, o z

$$R_X(\theta) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\theta & -\sin\theta & 0 \\ 0 & \sin\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$R_Y(\theta) = \begin{bmatrix} \cos\theta & 0 & -\sin\theta & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ \sin\theta & 0 & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

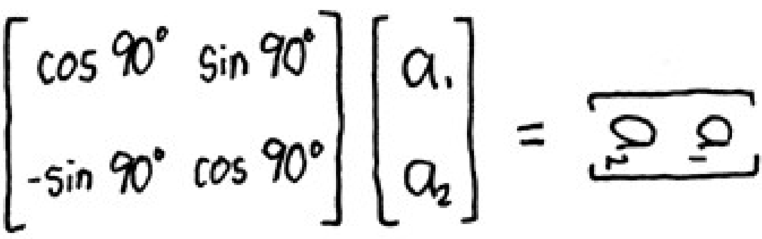
$$R_Z(\theta) = \begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta & 0 & 0 \\ \sin\theta & \cos\theta & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

e le inverse?

$$R_X(\theta)^{-1} = R_X(-\theta) = R_X(\theta)^{\mathrm{T}}$$

59

da XKCD



http://xkcd.com/184/

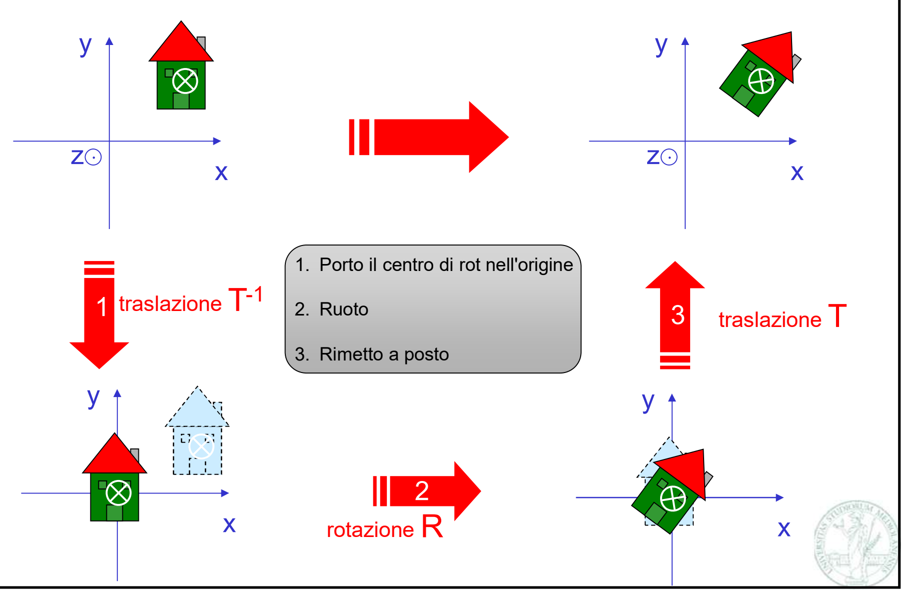
60

Matrici di rotazione

- Tutte le matrici di rotazione con asse qualsiasi passante per l'origine le posso costruire componendo rotazioni sui tre assi X, Y, Z
- Loro inversa: la trasposta
- Sono matrici ortonormali

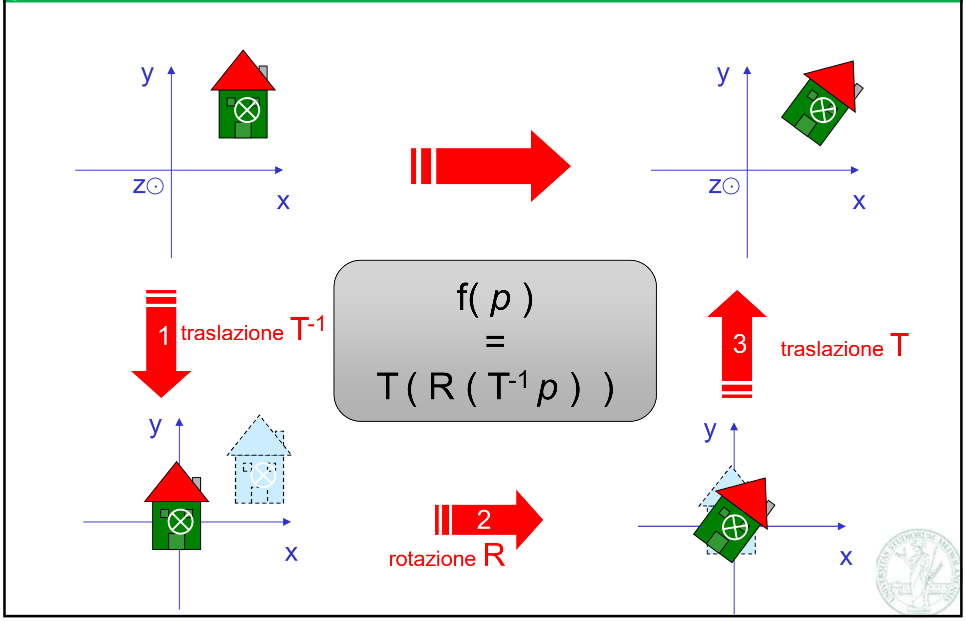
61

Rotazione intorno ad un asse *parallelo* all'asse z



62

Rotazione intorno ad un asse *parallelo* all'asse z



63

Composizione di trasformazioni

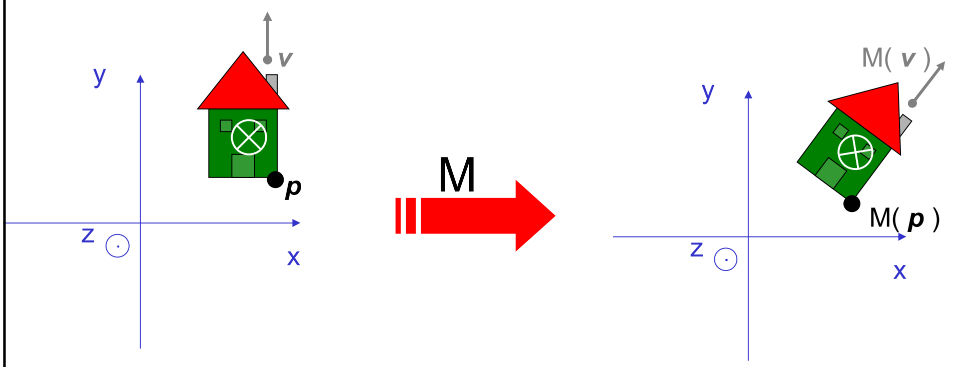
✓ Moltiplicazione matrici (vettori) ha la propretà associativa

$$
\begin{aligned}
f(p) &= T\,(\,R\,(\,T^{-1}\,p\,)\,\,) \\
&= \underbrace{(T\,R\;\;T^{-1})}_{\text{una matrice } M \text{ 4x4 che fa tutto.}}\,p
\end{aligned}
$$

- considerazioni sull'efficienza
- cosa possiamo dire sulla forma di M ?
- cosa succede se moltiplichiamo un *vettore* per M ?

64

Punti VS vettori



p **= (* , * , * , 1)** punto all'angolo della casa **(punto)**
v **= (* , * , * , 0)** velocità vettoriale del fumo **(vettore)**

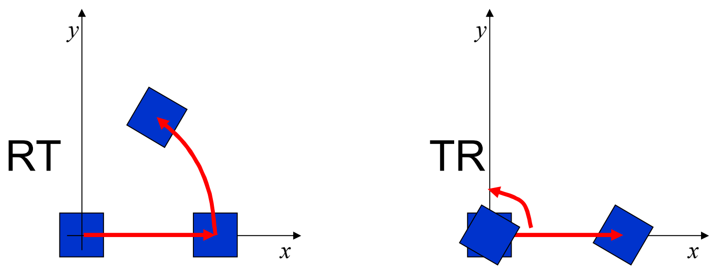
65

Ripassino: moltiplicazione matrice matrice

- ✓ Attenzione all'inversione: $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$
- ✓ Associativa si, ma commutativa no!

  AB ≠ BA

  ⇒ previsione:
  determinare il corretto ordine delle trasformazioni non sarà intuitivo



66