

1

Una (imperfetta) categorizzazione dei tipi di modelli digitali 3D

		ELEMENTI DISCRETI			CONTINUI
		regolari <i>«a griglia»</i>	semi-regolari o irregolari		
			elementi simpliciali	elementi non simpliciali	
SUPERFICIALI	2-manifold <i>«rappresenta una vera superficie»</i>	Height Field Range Scan Geometry Images	Triangle Mesh	Polygonal Mesh Quad Mesh Quad dominant Mesh	Subdivision surfaces Parametric Surfaces (es. B-splines)
	non-manifold <i>«non rappresenta una sup»</i>	Set di Range Scan	Point Cloud		
VOLUMETRICI	(3-manifold)	Voxelized Volume Volumetric Textures	Tetra Mesh	Hexa Mesh	Implicit models (es. CSG)

3

## Modelli 3D Volumetrici

### 1. Discreti & regolari: **dataset voxelizzati**

- ⇒ analogo di un'immagine rasterizzata, ma in 3D
- ⇒ una griglia di voxel

### 2. Discreti & irregolari: **mesh poliedrali**

- ⇒ analogo di una mesh poligonale (ma nel volume)
- ⇒ insieme di poliedri adiacenti faccia a faccia

### 3. Continui: **modelli impliciti**

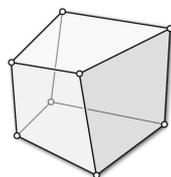
- ⇒ rappresentazione basata su funzioni volumetriche
- ⇒ superficie come luogo di zeri di una funzione



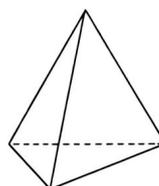
4

## Mesh poliedrale

- ✓ Corrispondente volumetrico delle mesh poligonali
- ✓ Composta da poliedri quali...



**esaedro**  
(o "hexa" per brevità)



**tetraedro**  
(o "tetra" per brevità)

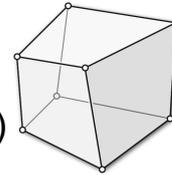


5

## Modelli 3D volumetrici ad elementi finiti

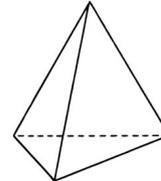
✓ Tipo degli elementi:

- ⇒ hexahedra (anche detti “cuboidi”)
- ⇒ tetrahedra (piramidi a base triangolare)
- ⇒ poliedri generici (raro)



✓ mesh poliedrale =  
mesh composta da  
elementi poliedrici  
adiacenti faccia a faccia

- ⇒ hexahedron mesh, o hexa-mesh
- ⇒ tetrahedron mesh tetra-mesh



✓ esempio di visualizzatore: [www.hexalab.net](http://www.hexalab.net)



6

## Mesh poliedrale

✓ Composta da

⇒ **geometria:**

- vertici (0D),  
con pos (x,y,z)

⇒ **connettività:**

- poliedri (3D)
- facce (2D)
- edge (1D)

che connettono i vertici

⇒ **attributi**

- sui vertici,
- Implicitamente  
inteprolati dentro gli  
elementi

✓ Struttura dati:  
simile alla mesh  
poligonale

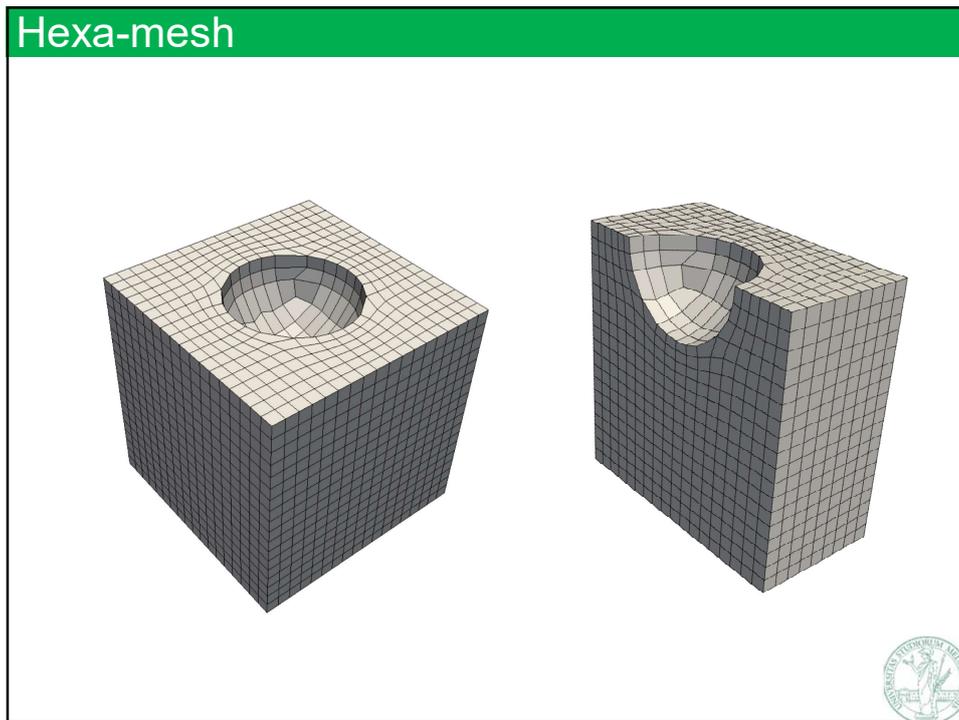
⇒ **indicizzata:**

- lista vertici,
- lista poliedri

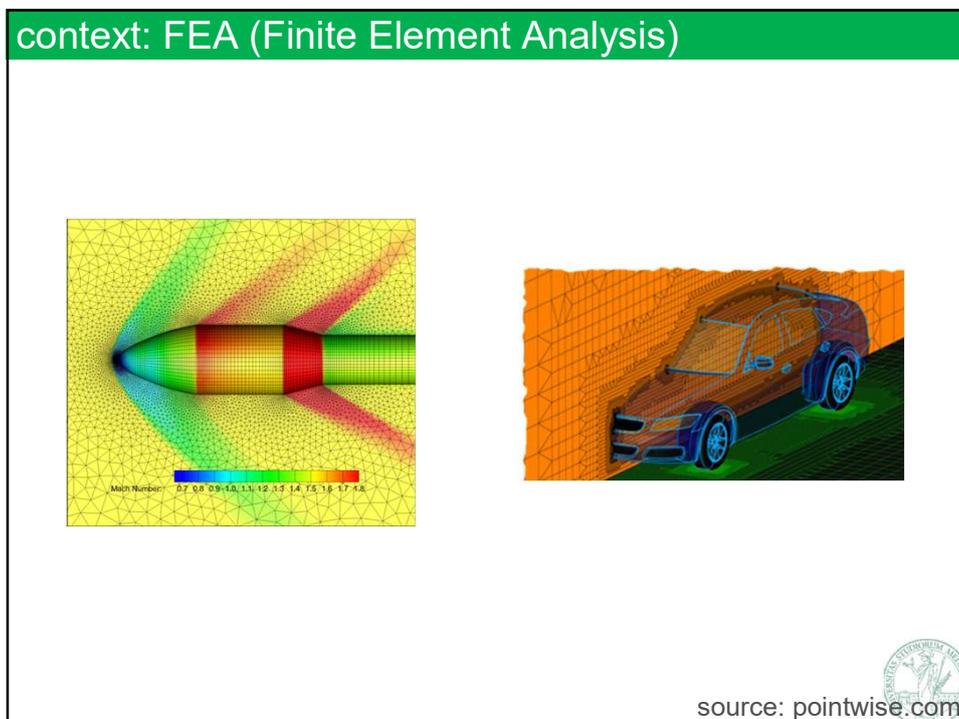
⇒ Esistono anche  
varianti per mesh  
poliedrali di struttura  
basata su half-edge



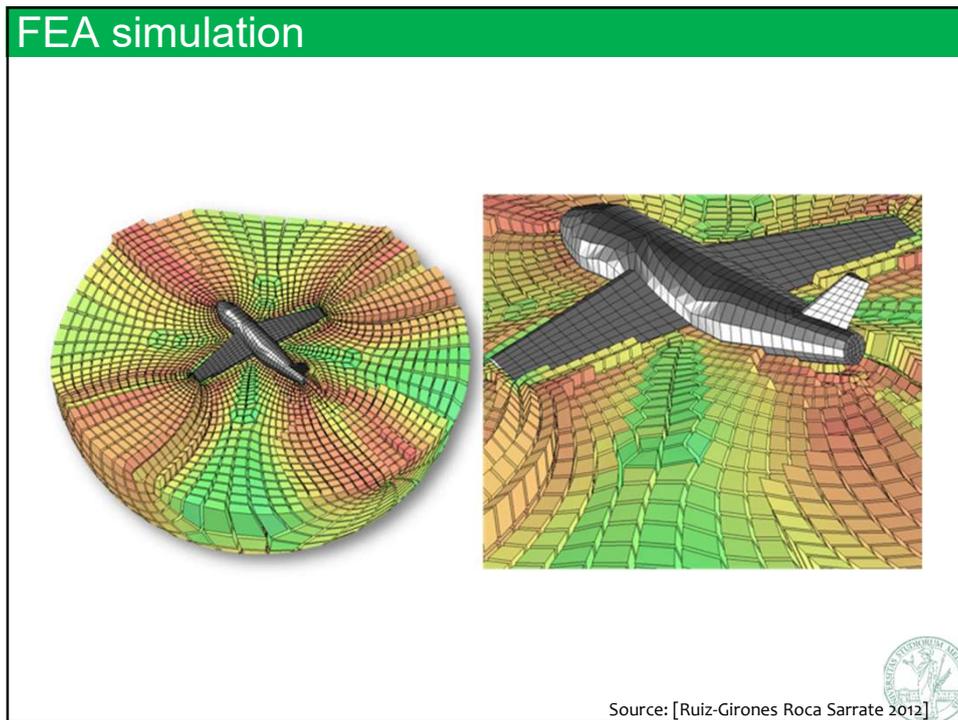
7



8



9

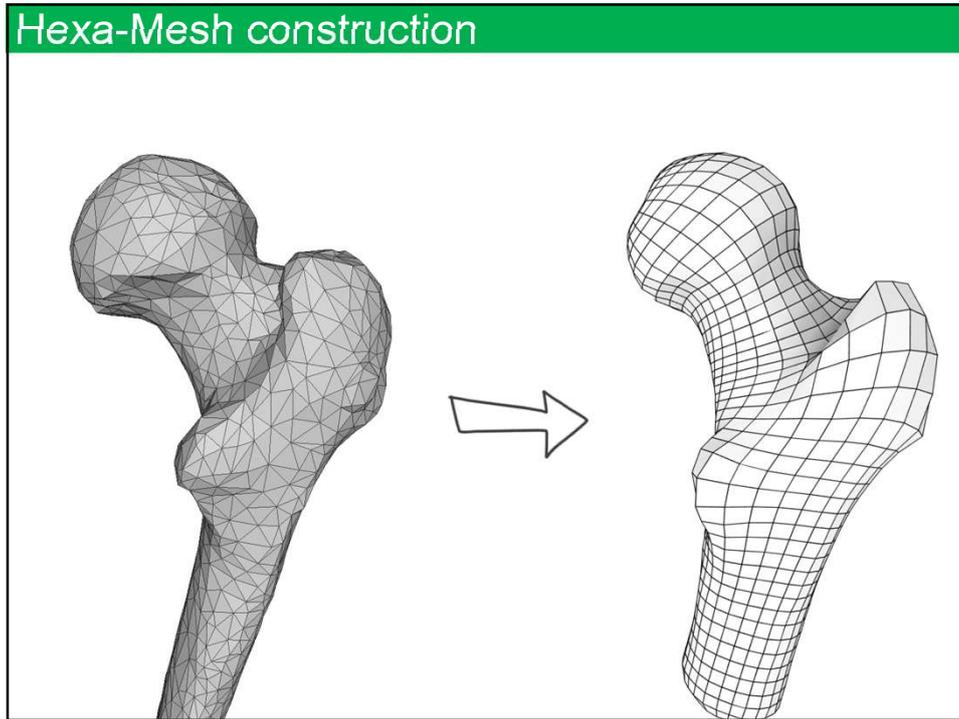


13

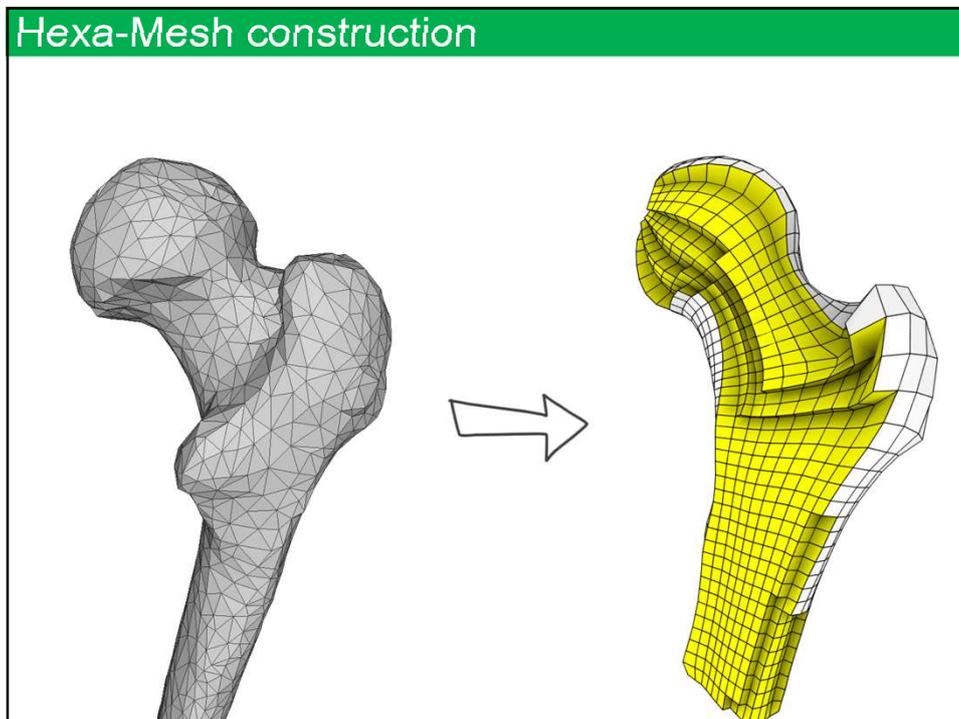
### Uso tipico: simulazioni fisiche

- ✓ FEM / FEA  
(Finite Element Method /  
Finite Element Analysis)
  - ⇒ Usata in ingegneria per verificare virtualmente le proprietà strutturali degli oggetti rappresentati
  - ⇒ Esempio: simulazione di carico:  
questo palazzo sostiene il suo peso?  
questo ponte sostiene il suo carico?
  - ⇒ Esempio: simulazione di termodinamica:  
come si diffonde il calore all'interno di questo oggetto?
  - ⇒ Simulazione dinamica, o statica
- ✓ Le simulazioni sono il principale uso delle mesh poliedrali
- ✓ Problema (difficile): hexa-meshing o tetra-meshing:  
costuire una hexa-mesh o tetra-mesh  
a partire da una rappresentazione superficiale
  - ⇒ tipicamente, da una mesh poligonale (es: triangolare)

14

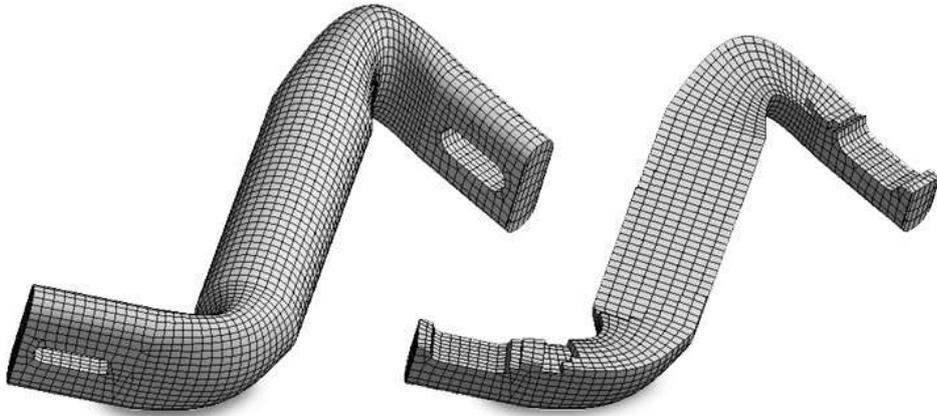


17



18

## Hexahedron Mesh (Hex-mesh, hexa-mesh)

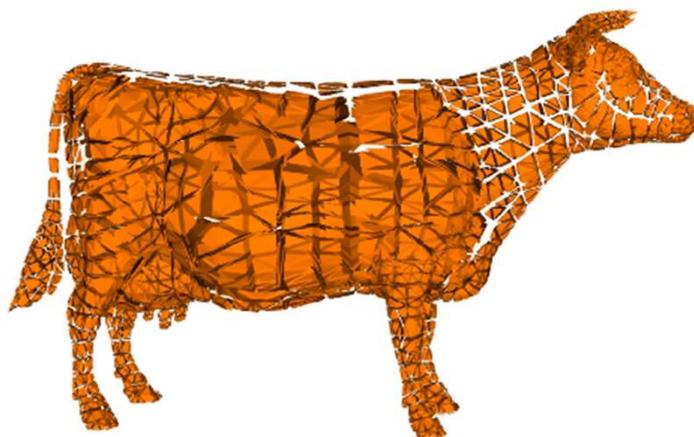


vedere esempi attraverso il visualizzatore  
di hexa mesh online: [www.hexalab.net](http://www.hexalab.net)



21

## Tetra Mesh



22

## Tetraedri

✓ Tetraedro: struttura *simpliciale* del volume

⇒ come il triangolo è lo è della superficie.

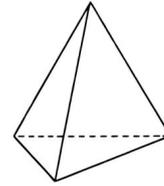
⇒ cioè: un tetraedro è il luogo di punti che sono l'interpolazione lineare fra i suoi quattro vertici

⇒ cioè: ogni punto P dentro un tetraedro T (superficie compresa) è esprimibile come una (e una sola) combinazione lineare dei quattro vertici di T

⇒ i 4 pesi di questa combinazione (quattro scalari) sono detti le coordinate baricentriche di P dentro T

⇒ posso usare le coordinate baricentriche per interpolare fra gli attributi definiti sui vertici di T

✓ In tutto questo: tetra-mesh (volume)  
del tutto analoga alla tri-mesh (superficie)

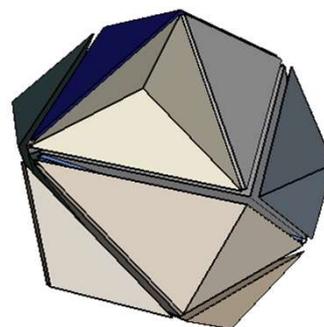
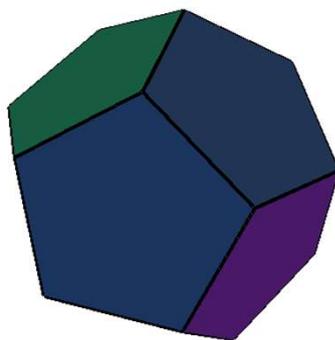


23

## Tetrahedralization

✓ Ogni poliedro può essere scomposto in tetraedri

⇒ Così come ogni poligono in triangoli



24

### Computo delle «coordinate baricentriche» dentro un qualsiasi elemento *simpliciale*

- ✓ E' lo stesso problema in tutte le dimensioni con la stessa soluzione!
- ✓ Dato un tetraedro (o un triangolo, o un segmento) costituito dai suoi 4 (o 3, o 2) vertici  $\mathbf{p}_0 \dots \mathbf{p}_n$  e un punto  $\mathbf{p}$  al suo interno, trovare i 4 (3, 2) le «coordinate baricentriche» di  $\mathbf{p}$  dentro a quel tetraedro (o tri, o sec))
- ✓ cioè i 4 (o 3, o 2) valori scalari  $t_0 \dots t_n$  tali che

$$\mathbf{p} = \sum_i t_i \mathbf{p}_i \quad \sum_i t_i = 1 \quad \forall i: 0 \leq t_i \leq 1$$

- ✓ Fatto questo, il valore dell'attributo  $a$  in  $\mathbf{p}$  sarà così dato dalla stessa combinazione lineare degli attributi  $a_0 \dots a_n$  definiti sui vertici :
 
$$a = \sum_i t_i a_i$$

26

### Computo delle «coordinate baricentriche» dentro un qualsiasi elemento *simpliciale*

- ✓ Schema generale della soluzione

1. Unire i 4 (3, 2) vertici  $\mathbf{p}_0 \dots \mathbf{p}_n$  al punto  $\mathbf{p}$
2. Hai ottenuto 4 (3,2) nuovi sotto-tetraedri (-triangoli, -segmenti) che scompongono il tetraedro (triangolo, segmento) originale
3. Calcola l'estensione (cioè il volume, l'area, la lunghezza) di questi nuovi sotto-elementi
4. La coordinata baricentrica  $t_i$  è data dall'estensione dell'elemento opposto al vertice  $\mathbf{p}_i$  diviso la somma delle estensioni (cioè diviso l'estensione dell'elemento originale)

- ✓ **Esercizio:** scrivere la formula nei tre casi, ipotizzando di avere una funzione volume( $\mathbf{p}_0, \mathbf{p}_1, \mathbf{p}_2, \mathbf{p}_3$ ) che restituisce il volume di un tetraedro di 4 vertici dati

27

## Tetra meshes o Hexa Meshes?

- ✓ Risoluzione di una mesh poliedrale: n. di poliedri (o di vertici)
  - ⇒ maggiore risoluzione: simulazioni più accurate ma più lente
  - ⇒ nota: numero di elementi è CUBICO con 1/dimensione lineare
- ✓ Può essere adattiva (e spesso lo è)
- ✓ Multi-risoluzione:  
piramidi di livello di dettaglio sono possibili
  - ⇒ similmente alle mesh poligonali
- ✓ Categorie, simili a mesh poligonali:
  - ⇒ «Pure» hexa-mesh: solo elementi hexa
  - ⇒ «Hexa-dominant» mesh: grande maggioranza di elementi Hexa
- ✓ Esiste un concetto di **regolarità** locale anche per le hexa meshes / tri meshes
  - ⇒ analogo a quello delle alle mesh, ma definito sugli edge:
    - un edge di una hexa mesh è regolare sse è condiviso da 4 hexa
    - un edge di una tetra mesh è regolare sse è condiviso da 6 tetra
  - ⇒ mesh semiregolare: maggioranza di edge regolari.



29

## Tetra meshes o Hexa Meshes

- ✓ Per poter essere utilizzata in una simulazione, una hexa mesh / tetra mesh deve avere elementi di buona «qualità», cioè (semplificando), la loro forma deve essere lontana dall'essere degenerare (cioè piatta o, peggio, concava)
  - ⇒ la generazione automatica di mesh poliedrali con questa caratteristica è un problema aperto e difficile
  - ⇒ la generazione è fatta a partire da una struttura superficiale, es una mesh poligonale (**deve** essere two-manifold, chiusa, ben orientata)
- ✓ Hexa meshes:
  - ⇒ più difficile da costruire
  - ⇒ ma le simulazioni su hexa mesh sono più efficienti (a parità di risoluzione) o più accurate (a parità di tempo di esecuzione)
  - ⇒ recentemente, questo assunto è stato messo in discussione da alcuni risultati teorici di ricerca, che sembrano mostrare un vantaggio delle tetra-mesh



30