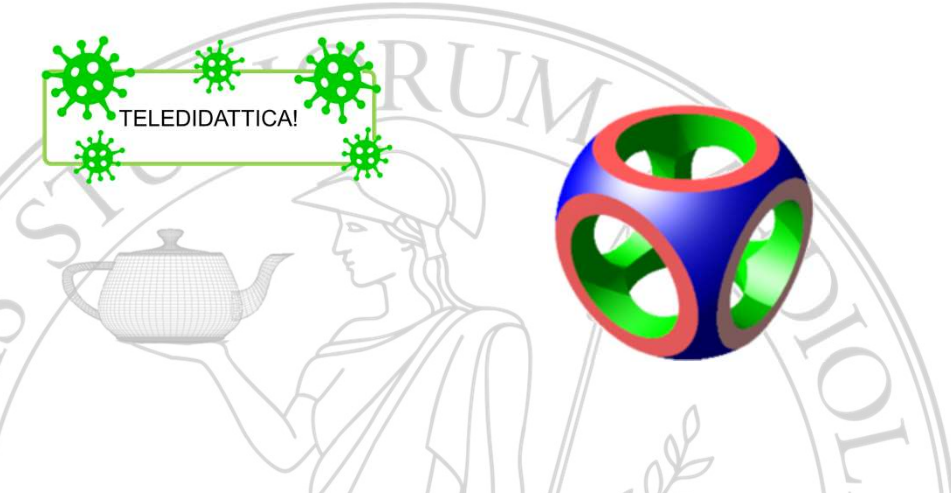
Marco Tarini - Computer Graphics 2020/2021
Università degli Studi di Milano

Modelli impliciti



94

Modelli 3D Volumetrici

1. Discreti & regolari: dataset voxellizati
   - ⇒analogo di un immagine rasterizzata, ma in 3D
   - ⇒una griglia di voxel
2. Discreti & irregolari: mesh poliedrali
   - ⇒analogo di una mesh poligonale (ma nel volume)
   - ⇒insieme di poliedri adiacenti faccia a faccia
3. Continui: modelli impliciti
   - ⇒rappresentazione basata su funzioni volumetriche
   - ⇒superficie come luogo di zeri di una funzione

95

Una (imperfetta) categorizzazione dei tipi di modelli digitali 3D

		ELEMENTI DISCRETI			CONTINUI
		regolari *«a griglia»*	semi-regolari o irregolari: elementi simpliciali	semi-regolari o irregolari: elementi non simpliciali	
SUPERFICIALI	2-manifold *«rappresenta una vera superficie»*	**Height Field** **Range Scan** **Geometry Images**	**Triangle Mesh**	**Polygonal Mesh** **Quad Mesh** **Quad dominant Mesh**	**Subdivision surfaces** **Parametric Surfaces (es. B-splines)**
SUPERFICIALI	non-manifold *«non rappresenta una sup»*	**Set di Range Scan**	**Point Cloud**		
VOLUMETRICI	(3-manifold)	**Voxelized Volume** **Volumetric Textures**	**Tetra Mesh**	**Hexa Mesh**	**Implicit models (es. CSG)**

96

Modello implicito

- ✓ Un oggetto definito (implicitamente) da una funzione contina f
  che va da punti dello punti 3D a valori scalari
  (detta funz. generatrice o funz. primitiva)

$$f: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$$

- ✓ Il valore di f definisce, per un punto dato $\mathbf{p}$, se è dentro oppure fuori dall'oggetto:
  - $\Rightarrow f(\mathbf{p}) < 0$ <==> $\mathbf{p}$ dentro
  - $\Rightarrow f(\mathbf{p}) > 0$ <==> $\mathbf{p}$ fuori
  - $\Rightarrow f(\mathbf{p}) = 0$ <==> $\mathbf{p}$ sulla superficie

97

Modelli impliciti: semantica del valore scalare

- ✓ Un'interpretazione comune:
  «*valore "fuzzy" di appartenenza all'oggetto*»
  - ⇒ 1 : dentro (appartiene all'oggetto)
  - ⇒ 0 : fuori (non appartiene all'oggetto)
  - ⇒ ½ : posizione della superficie
    (là dove si passa da «più fuori che dentro» a «più dentro che fuori)
- ✓ Un'altra interpretazione comune:
  «*distanza con segno (approssimata) dalla superficie*»
  - ⇒ Valori negativi : dentro (distanza negativa dalla superficie)
  - ⇒ Valori positivi : fuori (distanza positiva dalla superficie)
  - ⇒ Zero : posizione della superficie (per definizione)
  - ⇒ Nota: eccetto dove 0, non deve essere esattamente la distanza
- ✓ Note:
  - ⇒ È facile convertire questi valori uno nell'altro (come?)
  - ⇒ Il gradiente della funzione è invertito nei due casi
    (primo caso: gradiente verso il dentro. Secondo caso: verso il fuori)
  - ⇒ In questi lucidi, assumeremo il secondo caso

98

Superficie implicita

- ✓ E' la **superficie** che delimita
  il modello implicito (volumetrico)
- ✓ E' dato il **luogo degli zeri** di una funzione :

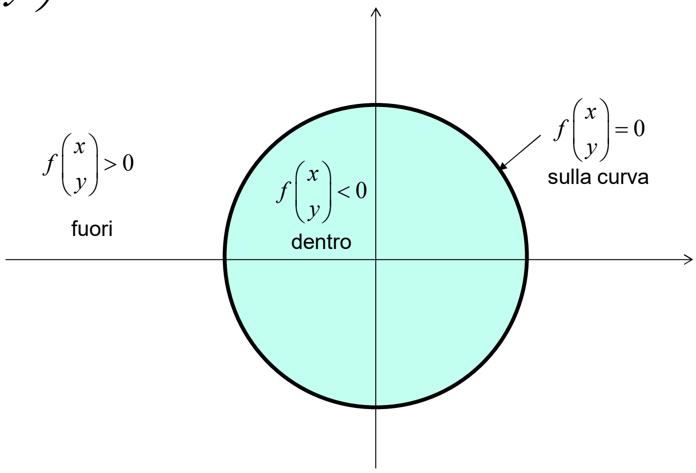
$$f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$$

(cioè l'insieme di tutti i punti 3D $\mathbf{p}$ t.c. $f(\mathbf{p}) = 0$)

99

Esempio ridotto in 2D: un cerchio

$$f\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = x^2 + y^2 - r^2$$



100

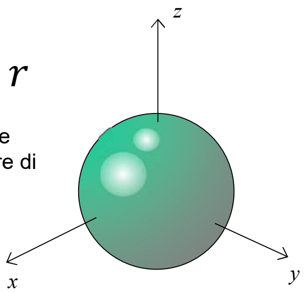
Esempio di modello implicito: una sfera

$$f\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} - r$$

cioè

$$f(\mathbf{p}) = \|\mathbf{p} - \mathbf{0}\| - r$$

Origine (vettore di 0,0,0)



Sfera centrata nell'origine

101

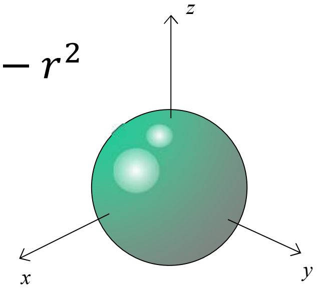
Esempio di modello implicito: una sfera (variante)

$$f\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = x^2 + y^2 + z^2 - r^2$$

Funzione diversa, stessa superficie

cioè

$$f(\mathbf{p}) = \|\mathbf{p} - \mathbf{0}\|^2 - r^2$$



Sfera centrata nell'origine

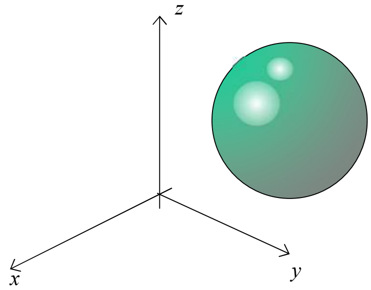
102

Esempio di modello implicito: una sfera

$$f(\mathbf{p}) = \|\mathbf{p} - \mathbf{c}\|^2 - r^2$$

Funzione diversa, stessa superficie

«La superfice della sfera è il luogo dei punti $\mathbf{p}$ che distano r dal suo centro $\mathbf{c}$»



Sfera centrata nel punto $\mathbf{c}$

103

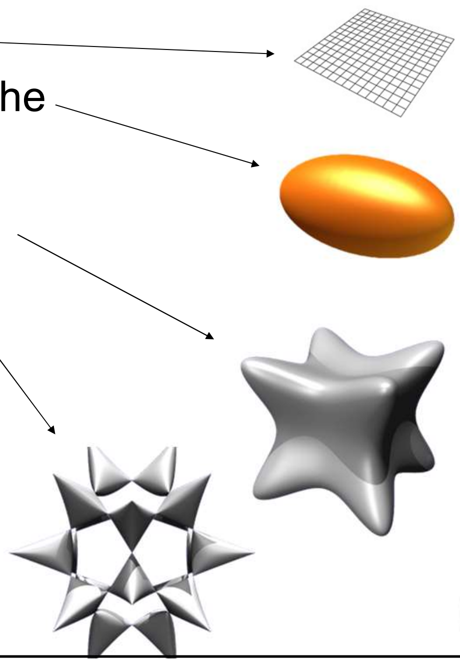
Categorie di modelli impliciti

- ✓ Superfici algebriche: $f()$ è un polinomio
- ✓ Superfici quadriche : $f()$ è di grado 2
  - ⇒classe importante!
    - equazioni semplici, ma buon potere esressivo
    - per esempio, sfere perfette (l'esempio sopra)
- ✓ Superfici cubiche : $f()$ è di grado 3
- ✓ Superfici quartiche : $f()$ è di grado 4
- ✓ etc

104

Superfici algebriche

- ✓ Grado 1: Lineari
- ✓ Grado 2: Quadratiche
- ✓ Grado 3: Cubiche
- ✓ Grado 4: Quartiche
- ✓ Grado 5: Quintiche
- ✓ Grado 6: Sestiche
- ✓ ...



105

Normali di una superficie implicita

- Sia $\mathbf{p}$ un punto sulla superficie, cioè $f(\mathbf{p}) = 0$
- Quanto vale la normale alla superficie in $\mathbf{p}$?
  - ⇒ cioè: quale direzione $\hat{\boldsymbol{n}}$ è ortogonale alla superficie nel punto $\mathbf{p}$
  - ⇒ cioè: in che direzione $\hat{\boldsymbol{n}}$ devo spostarmi da $\mathbf{p}$ per allontanarmi il più possibile dalla superficie
  - ⇒ cioè: in che direzione $\hat{\boldsymbol{n}}$ devo spostarmi da $\mathbf{p}$ per aumentare il più possibile il valore di $f\,(\mathbf{p} + k\,\hat{\boldsymbol{n}})$
- Risposta: basta (per def) prendere il gradiente di $f(\mathbf{p})$
  - ⇒ gradiente f vettore delle derivate parziali in calcolato in $\mathbf{p}$ (rinormalizzato)

$$\hat{\boldsymbol{n}} = \frac{\nabla f(\mathbf{p})}{\|\nabla f(\mathbf{p})\|}$$

106

Gradiente di una funzione (ripasso)

- Sia $f(\mathbf{p})$ è una funzione da punti a scalari

$$f: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$$

- Quindi da x, y, z ad un valore scalare
- Il suo gradiente $\nabla f(\mathbf{p})$ nel punto $\mathbf{p}$ è definito dal vettore delle sue derivate parziali in x, y, z (calcoalte in $\mathbf{p}$)

$$\nabla f(\mathbf{p}) = \begin{pmatrix} \partial f / \partial x \\ \partial f / \partial y \\ \partial f / \partial z \end{pmatrix}$$

- Ad esempio…

$$f\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = x^2 + y^2 + z^2 - r^2$$

funzione primitiva
della sfera

$$\nabla f\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2x \\ 2y \\ 2z \end{pmatrix}$$

← derivata di f in x
← derivata di f in y
← derivata di f in z

gradiente di f,
cioè normale della sfera
nel punto x, y, z
(a meno di normalizzazione)

107

Vantaggi delle superfici implicite

- ✓ E' una rappresentazione volumetrica
  - ⇒ per es, facile determinare se un punto $\mathbf{p}$ sia all'interno o all'esterno di un oggetto – basta valutare f su $\mathbf{p}$!
- ✓ E' molto compatta
  - ⇒ a differenza di quelle discrete!
- ✓ Rappresenta superfici curve
  - ⇒ Paragona con tri-mesh, che rappresenta superfici lineari a tratti (cioè localmente piatti)
- ✓ Buon modello per superfici che variano nel tempo
  - ⇒ es quelle dei fluidi
- ✓ Consentono potenti operazioni di editing
  - ⇒ operazioni volumetriche booleane: vedi sotto

108

Da modello implicito a mesh

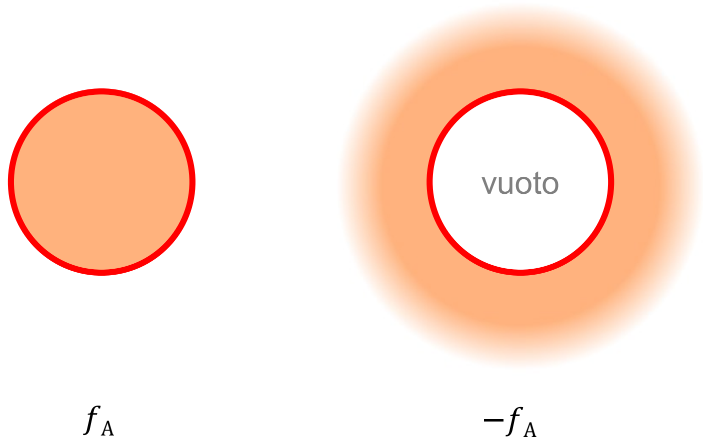
- ✓ Modo comune (ma non l'unico): passare da voxel
- ✓ Passi:
  - ⇒ **campionare** f ad
    Parametri dell'algoritmo
    (una data risoluzione resx, resy, resz)
    ottenendo un **campo scalare voxelizzato**
  - ⇒ estrarre una mesh poligonale M
    attraverso **Marching Cubes** (con soglia 0)
  - ⇒ calcolare le **normali** nei vertici di M,
    con attraverso i **gradienti** di f
    calcolati nelle posizioni dei vertici

    (preferibile al calcolo delle normali dei vertici attraverso le normali dei triangoli, come abbiamo visto per una mesh generiche)

109

Operazioni booleane volumetriche

- Opposto: dentro diventa fuori e viceversa

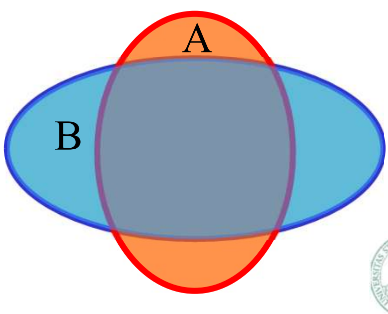


⇒ Posso vedere gli scavi come intersezioni con gli opposti

110

Operazioni booleane volumetriche

- Siano A e B modelli impliciti con funzioni primitive f_A e f_B
- Posso definire (come modelli impliciti) la funzione primitive della loro…
  - ⇒ inversione: $-f_A$
  - ⇒ intersezione: $\max(f_A, f_B)$
  - ⇒ unione: $\min(f_A, f_B)$
  - ⇒ scavo di B da A: $\min(f_A, -f_B)$
  - ⇒ Scavo di A da B: $\min(-f_A, f_B)$



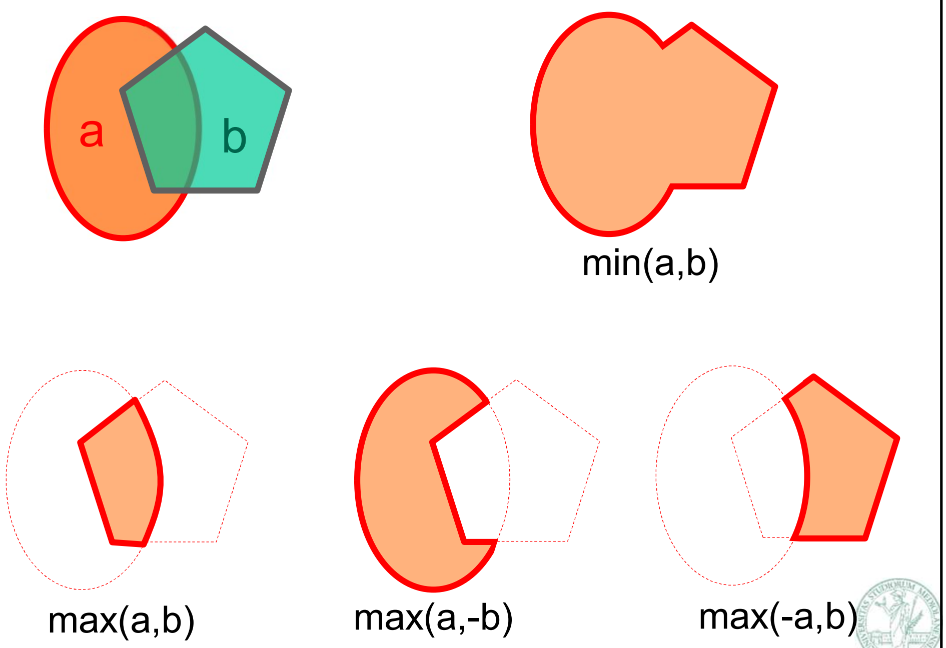
111

Operazioni booleane volumetriche

Operazione volumetrica booleana	**Vista come operazione fra insiemi di punti**	**Vista come operazione booleana**	**Operaz delle due funzioni primitive**
Opposto	$\bar{A}$	$\sim A$	$-f_A$
Intersezione	$A \cap B$	$A \wedge B$	$\max(f_A, f_B)$
Unione	$A \cup B$	$A \vee B$	$\min(f_A, f_B)$
Scavo di B da A	$A \cap \bar{B}$	$A \wedge \sim B$	$\max(f_A, -f_B)$
Scavo di A da B	$\bar{A} \cap B$	$(\sim A) \wedge B$	$\max(-f_A, f_B)$

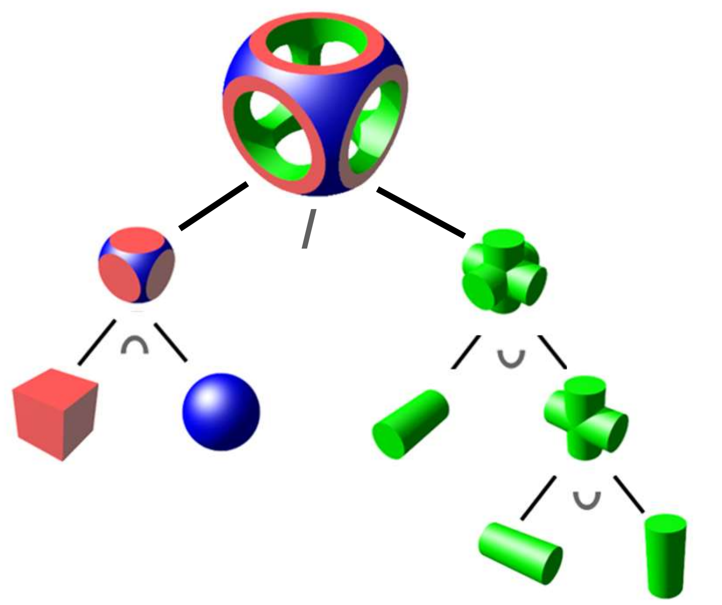
112

Operazioni booleane volumetriche di modelli impliciti



113

Constructive Solid Geometry (CSG)

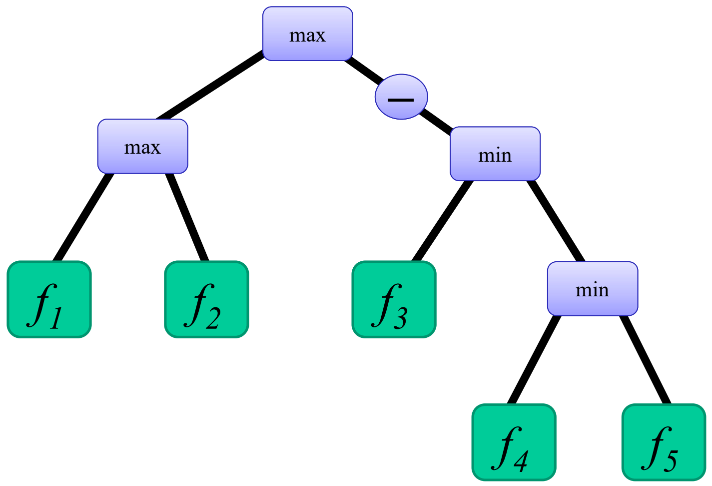


115

Geometric Solid Modelling

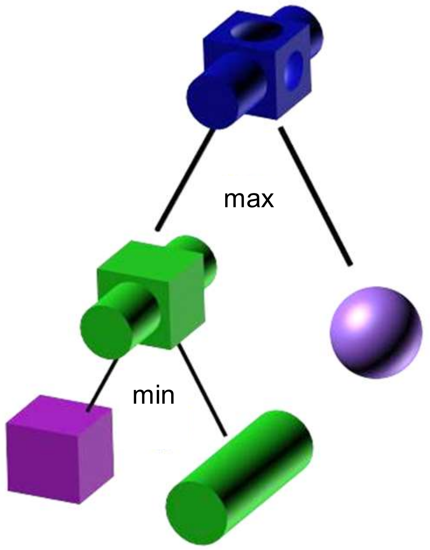
Albero di parsing delle operazioni

$$f(\mathbf{p}) = \max\Big(\max(f_1(\mathbf{p}), f_2(\mathbf{p}))\ , -\min\big(f_3(\mathbf{p}), \min(f_4(\mathbf{p}), f_5(\mathbf{p}))\big)\Big)$$



116

Constructive Solid Geometry CSG: altro esempio



117

Constructive Solid Geometry

- ✓ Idea: modellare oggetti solidi 3D a partire dalle forme più semplici («primitive») che li compongono
- ✓ Utile per modellare oggetti **meccanici / artificiali**
  - ⇒ Contesto CAD
- ✓ Il modello è rappresentato da una struttura ad albero
  - ⇒ radice = l'intero oggetto
  - ⇒ nodi interni = operazioni booleane dei nodi figli
  - ⇒ foglie = forme basilari – associate a funzioni primitive (esempio: sfere, cilindri, semispazi, cubi…)
- ✓ E' l'albero di parsing di un'espressione di operazioni booleane

118

Da modello implicito a mesh («esplicitare» un modello implicito»)

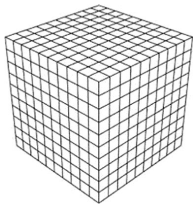
✓ Un modo semplice (non necessariamente l'unico) di farlo è…

1. Valutazione nella posizione di ogni voxel

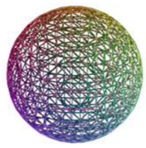
2. Marching cubes (con soglia 0)

$$f\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix} = x^2 + y^2 + z^2 - r^2$$

Modello implicito (funzione primitiva)



Modello volumetrico voxelizzato (un valore scalare per ogni voxel)



Mesh

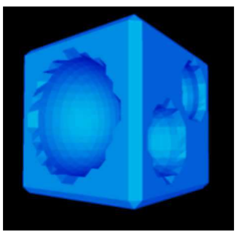
Scelta: a che risoluzione?

119

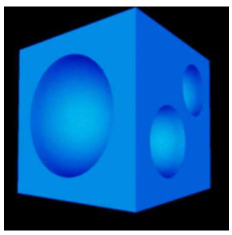
Rendering di un modello implicito

✓ un modello implicito può essere renderizzato direttamente!
- ⇒ attraverso algoritmi di ray-casting (o ray-tracing)
- ⇒ (vedi seconda parte del corso!)

senza conversione in una mesh



Renderigng di un mesh ottenuta (passando da un volume a bassa risoluzone)



Rendering diretto con un algoritmo di ray-tracing

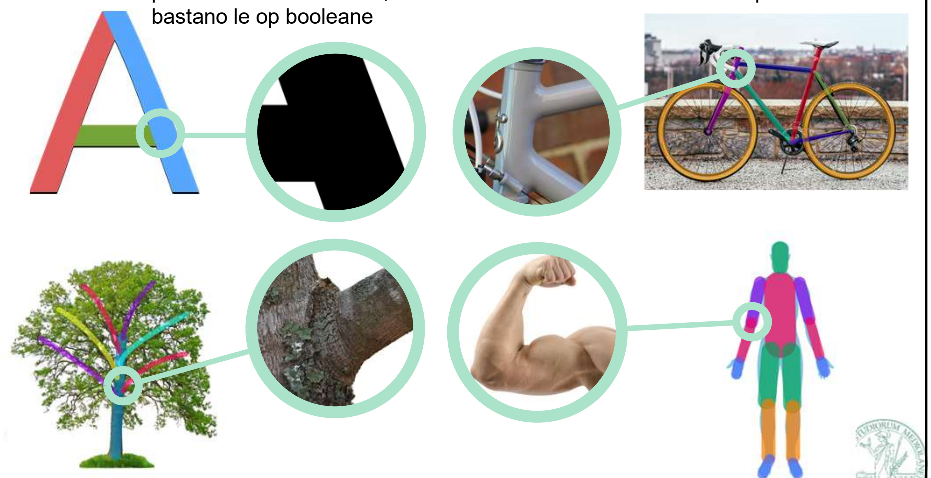
120

Oltre alle sempici operazioni booleane…

- ✓ Per molti oggetti, è utile unire le sottoparti con operazioni diverse da quelle booleane

Esempio:
per una lettera di un font,
bastano le op booleane

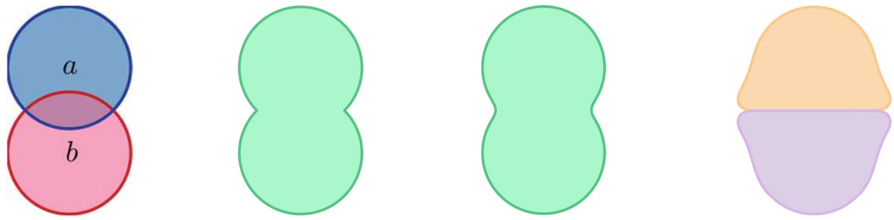
Ma la fusione fra due tubi
in una biciletta (welding)
non è ben approssimata
da una op booleana



122

Funzioni per combinare modelli impliciti

	union [Sabin 1968]	blend [Blinn 1982] [Ricci 1973]	contact & bulge [Cani 1993]



$\min(\,a, b\,)$

$a + b$

$\sqrt{a^n + b^n}^{\frac{1}{n}}$

$$\begin{cases} a - b + 1 & \text{if } b > 1 \\ a + h(a,b) & \text{else} \end{cases}$$

see «meta-balls»

123