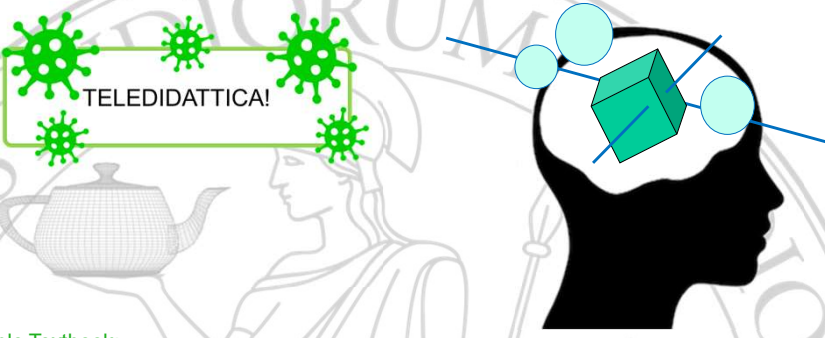


Marco Tarini - Computer Graphics 2019/2020
Università degli Studi di Milano

Vector and Point algebra part 2: prodotto cross



TELEDIDATTICA!

Possible Textbook:
"Mathematics for 3D Game Programming
and Computer Graphics, Third Edition"
Sec 2.3


56

Prodotto Cross

- ✓ Da due **vettori** a **vettore**

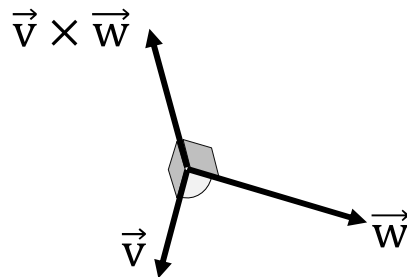
$$\vec{v} \times \vec{w} = \begin{pmatrix} v_x \\ v_y \\ v_z \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} w_x \\ w_y \\ w_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} v_y w_z - v_z w_y \\ v_z w_x - v_x w_z \\ v_x w_y - v_y w_x \end{pmatrix}$$

- ✓ Detto anche:
 - ⇒ Prodotto cross (perché si scrive con la crocetta)
 - ⇒ Prodotto vettoriale (perché restituisce uno vettore)
- ✓ Nel codice (librerie, linguaggi...) lo si può trovare scritto come: `cross(v,w)` `v^w` `v%w`
- ✓ E' definito solo in \mathbb{R}^3 !



57

Prodotto cross e ortogonalità



- ✓ Il prodotto cross fra \vec{v} e \vec{w} è sempre ortogonale sia a \vec{v} che a \vec{w}
- ✓ Prodotto cross = operazione per generare un vettore ortogonale a due vettore dati

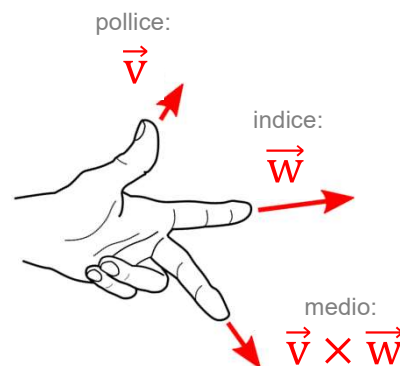


59

Verso del prodotto cross

- ✓ Un vettore ortogonale a due vettori (cioè al piano passante per quei due vettori) può assumere due versi opposti.
- ✓ **In quale dei due versi sarà orientato il cross?**

- ✓ Dipende dall'ordine degli operandi!
- ✓ NB: Bisogna applicare la stessa mano usata per *immaginare* gli assi



60

Prodotto cross: alcune proprietà

- ✓ Non commuta, anzi è anticommutativo:

$$\vec{v} \times \vec{w} = -\vec{w} \times \vec{v}$$

- ✓ E' lineare, cioè

⇒ Distribuisce con prodotto x scalare:

$$k (\vec{v} \times \vec{w}) = (k \vec{v}) \times \vec{w} = \vec{v} \times (k \vec{w})$$

⇒ Distribuisce con la somma vettoriale:

$$\vec{w} \times (\vec{u} + \vec{v}) = \vec{w} \times \vec{u} + \vec{w} \times \vec{v}$$

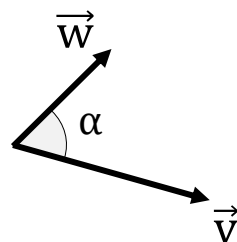
- ✓ Per tutti i vettori:

$$\vec{v} \times \vec{v} = \vec{0}$$



61

Lunghezza del prodotto cross



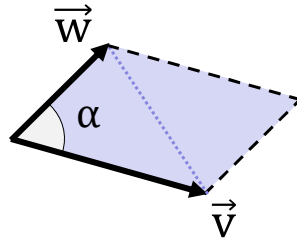
$$\|\vec{v} \times \vec{w}\| = \|\vec{v}\| \|\vec{w}\| |\sin(\alpha)|$$

se \hat{v} e \hat{w}
sono unitari: $\|\hat{v} \times \hat{w}\| = |\sin(\alpha)|$



62

Lunghezza del prodotto cross



$$\|\vec{v} \times \vec{w}\| = \|\vec{v}\| \|\vec{w}\| |\sin(\alpha)|$$

Nota: questa formula
è anche l'area del parallelogramma,
avente per lati \vec{v} e \vec{w}
cioè la *doppia area* del triangolo
avente quei due lati.



63

Prodotto cross, ortogonalità e allineamento

- ✓ Se \vec{v} oppure \vec{w} è degenerare (vettori nulli)
allora $\vec{v} \times \vec{w}$ è degenerare (vettore nullo)
- ✓ Altrimenti:
 - ⇒ $\|\vec{v} \times \vec{w}\| = 0$ i due vettori sono allineati
(possono essere opposti oppure no)
- ✓ Siano \hat{v} e \hat{w} due vettori unitari. Allora
 - ⇒ $\hat{v} \times \hat{w}$ è unitario sse \hat{v} e \hat{w} sono ortogonali
 - ⇒ $\hat{v} \times \hat{w}$ è nullo sse \hat{v} e \hat{w} sono coincidenti $\hat{v} = \hat{w}$
oppure opposti $\hat{v} = -\hat{w}$



64