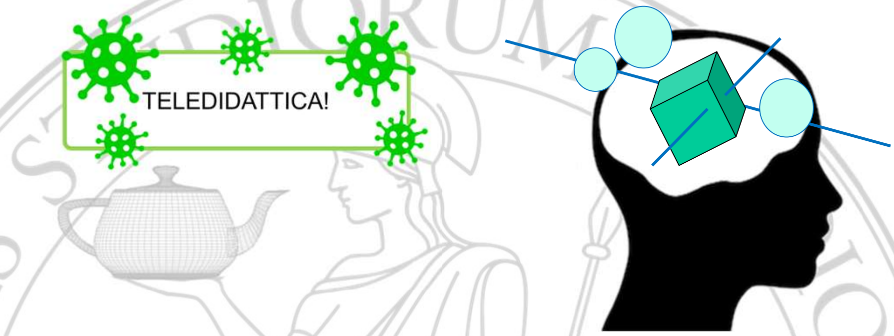
Marco Tarini - Computer Graphics 2020/2021
Università degli Studi di Milano

Vector and Point algebra part 3: prodotto dot



Possible Textbook:
“Mathematics for 3D Game Programming and Computer Graphics, Third Edition”
Sec 2.2

36

Prodotto Dot

- ✓ Da due vettori a uno scalare

$$\vec{v} \cdot \vec{w} \in \mathbb{R}$$

$$\vec{v} \cdot \vec{w} = (v_x, v_y, v_z) \cdot (w_x, w_y, w_z) = v_x w_x + v_y w_y + v_z w_z$$

- ✓ E’ detto anche:
  - ⇒Prodotto dot (perché si scrive con un puntino)
  - ⇒Prodotto scalare (perché restituisce uno scalare)
  - ⇒Prodotto «riga-per-colonna», *se* scrivo il primo vettore come riga e il secondo come colonna, cosa che posso scrivere ($\vec{v}^{T}\,\vec{w}$)
  - ⇒Prodotto interno

38

Prodotto Dot

- Da due vettori a scalare

$$\vec{v} \cdot \vec{w} \in \mathbb{R}$$

- Denotato anche come:

$\vec{v} \cdot \vec{w}$ — nota il "pallino", che dà il nome al prodotto (non si omette)

$< \vec{v}, \vec{w} >$

$(\vec{v}^T \ \ \vec{w})$ — "Il trasposto di v (v come vettore riga) per il vettore colonna w"

- Nel codice si trova (in linguaggi o librerie) con sinassi come:

`dot(v,w)`	`v.dot(w)`	`v*w`
funzione (metodo più comune)	metodo	operatore (infisso)

39

Prodotto dot: alcune proprietà

- Commuta:

$$\vec{v} \cdot \vec{w} = \vec{w} \cdot \vec{v}$$

- E' lineare, cioè
  - ⇒Distribuisce con prodotto x scalare:

$$k\ (\vec{v} \cdot \vec{w}) = \ (k\ \vec{v}) \cdot \vec{w} = \vec{v} \cdot (k\vec{w})$$

  - ⇒Distribuisce con la somma vettoriale:

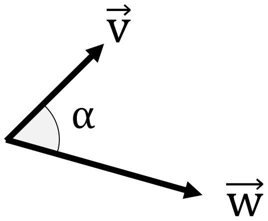
$$\vec{w} \cdot (\vec{u} + \vec{v}) = \vec{w} \cdot \vec{u} + \vec{w} \cdot \vec{v}$$

- Riscrittura della norma:

$$\vec{v} \cdot \vec{v} \ = \ ||\vec{v}||^2 \quad \text{cioè} \quad ||\vec{v}|| \ = \ \sqrt{\vec{v} \cdot \vec{v}}$$

40

Prodotto dot e coseno



$$\vec{v} \cdot \vec{w} = \|\vec{v}\| \ \|\vec{w}\| \ \cos(\alpha)$$

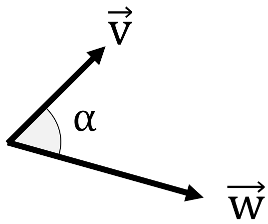
quindi se $\vec{v}$ e $\vec{w}$ non sono nulli: $\vec{v} \cdot \vec{w} = 0 \iff$ **u** e **v** ortogonali

se $\hat{v}$ e $\hat{w}$ sono unitari: $\hat{v} \cdot \hat{w} = \cos(\alpha)$

41

Prodotto dot e angolo

- ✓ Se $\vec{v}$ oppure $\vec{w}$ è degenere (vettore nullo) allora $\vec{v} \cdot \vec{w} = 0$
- ✓ Altrimenti:
  - $\Rightarrow$ $\vec{v} \cdot \vec{w} > 0$ i due vettori sono concordi, $\alpha < 90°$
  - $\Rightarrow$ $\vec{v} \cdot \vec{w} = 0$ i due vettori sono ortogonali, $\alpha = 90°$
  - $\Rightarrow$ $\vec{v} \cdot \vec{w} < 0$ i due vettori sono discordi, $\alpha > 90°$



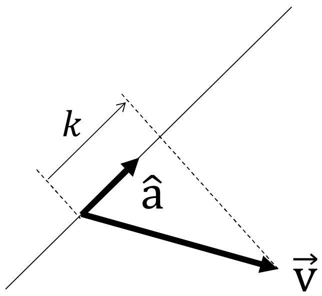
42

Prodotto dot fra vettori unitari

- ✓ Siano $\hat{v}$ e $\hat{w}$ due vettori unitari
- ✓ I due vettori sono…
  - ⇒sse $\hat{v} \cdot \hat{w} = 1$: coincidenti
  - ⇒sse $0 < \hat{v} \cdot \hat{w} < 1$: concordi
  - ⇒sse $\hat{v} \cdot \hat{w} = 0$: ortogonali
  - ⇒sse $-1 < \hat{v} \cdot \hat{w} < 0$: discordi
  - ⇒sse $\hat{v} \cdot \hat{w} = -1$: opposti
- ✓ In pratica, fra vettori unitari, il prodotto dot è una misura della somiglianza fra I due vettori

43

Prodotto dot e proiezione



$k = \hat{a} \cdot \vec{v}$

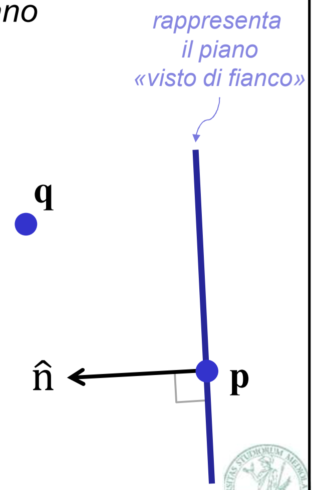
se $\hat{a}$ è unitario:

$\hat{a} \cdot \vec{v} =$ estensione di $\hat{a}$ in direzione $\vec{v}$

44

Esercizio: test punto / piano

- Sia dato un piano passante per $\mathbf{p}$ con normale $\hat{n}$
  - ⇒normale = *vett unitario ortogonale al piano*
  - ⇒$\mathbf{p}$ punto, $\hat{n}$ vettore unitario
- Calcolare se un dato punto $\mathbf{q}$ …
  - ⇒giace sul piano
  - ⇒si trova davanti al piano (è nel semispazio *davanti* al piano)
  - ⇒si trova dietro al piano (è nel semispazio *dietro* al piano)



45

Esercizio: test punto / piano

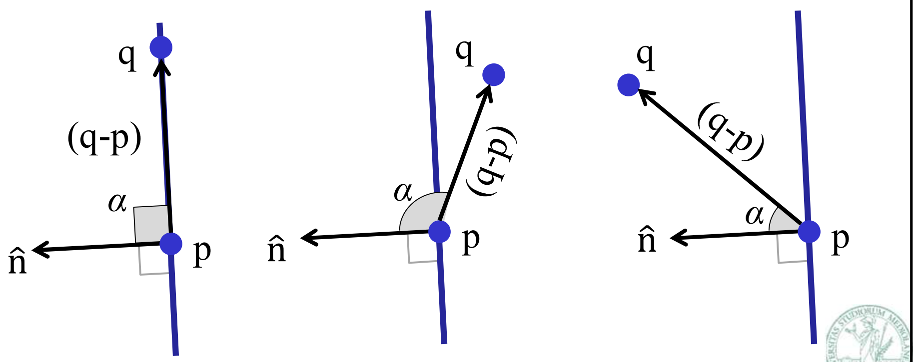
- Soluz:

$(\mathbf{q} - \mathbf{p}) \cdot \hat{n} = 0 \;\Leftrightarrow\; \alpha = 90° \;\Leftrightarrow\;$ $\mathbf{q}$ sul piano

$(\mathbf{q} - \mathbf{p}) \cdot \hat{n} < 0 \;\Leftrightarrow\; \alpha > 90° \;\Leftrightarrow\;$ $\mathbf{q}$ dietro al piano

$(\mathbf{q} - \mathbf{p}) \cdot \hat{n} > 0 \;\Leftrightarrow\; \alpha < 90° \;\Leftrightarrow\;$ $\mathbf{q}$ davanti al piano

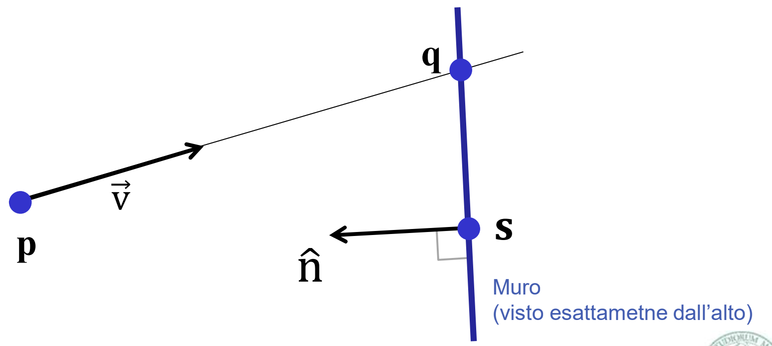
dot product



46

Esercizio 2: intersezione retta piano

Una persona inizialmente punto $\mathbf{p}$ si sposta del vettore $\vec{v}$ ogni secondo, in linea retta.
Davanti a se ha un muro passante per il punto $\mathbf{s}$ con normale $\hat{n}$
Trovare il punto $\mathbf{q}$ di impatto persona / muro



47

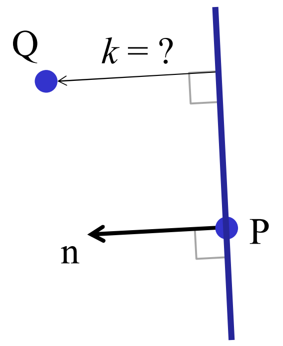
Traccia della soluzione e note

- ✓ Il muro (un piano) è definito da un punto appartenente al piano (qualsiasi) e la sua normale
- ✓ Il vettore $\vec{v}$ rappresenta la velocità della persona
- ✓ A tempo t, la persona ha fatto t passi in direzione $\vec{v}$
- ✓ Sia t il tempo di impatto (incognita). Allora
$$\mathrm{q} = \mathrm{p} + t\,\vec{\mathrm{v}}$$
- ✓ Sappiamo che q è sul piano. Allora il vettore $(\mathrm{q} - \mathrm{s})$ è ortogonale alla normale del piano
$$(\mathrm{q} - \mathrm{s}) \cdot \hat{\mathrm{n}} = 0$$
- ✓ Sostituendo, otteniamo
$$(\mathrm{p} + t\,\vec{\mathrm{v}} - \mathrm{s}) \cdot \hat{\mathrm{n}} = 0$$
- ✓ Risolvendo per t ottengo…
$$t = \frac{(\mathrm{s}-\mathrm{p})\cdot\hat{\mathrm{n}}}{\vec{\mathrm{v}}\cdot\hat{\mathrm{n}}}$$
- ✓ Sapendo t ricostruisco q come $\mathrm{p} + t\,\vec{\mathrm{v}}$

49

Esercizio: distanza (con segno) da piano

- ✓ Sia dato un piano $(\mathbf{p},\mathbf{n})$
  - ⇒ piano passante per il punto $\mathbf{p}$
  - ⇒ avente come normale il vettore unitario $\mathbf{n}$
- ✓ Calcolare la distanza di un punto $\mathbf{q}$ dal piano



51

Esercizio: distanza (con segno) da piano

- ✓ Soluz:

$$k = (\mathbf{q} - \mathbf{p}) \cdot \mathbf{n}$$

- ✓ note:
  - ⇒ k = estensione del vettore $\mathbf{q}$-$\mathbf{p}$ in direzione $\mathbf{n}$
  - ⇒ è richiesto che direzione $\mathbf{n}$ sia unitario
  - ⇒ questa è la distanza con segno:
    negativa se **q** davanti, positiva se **q** dietro al piano
  - ⇒ se si vuole una vera distanza (scalare non negativo)
    basta prendere $|\ k\ |$

52