Trasf. di rotazione in 2D generica
(attorno all'origine, di un angolo β **generico**, in senso antiorario)

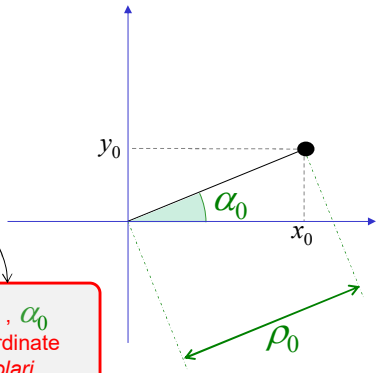
preliminare:coordinate polari
(un modo diverso per
esprimere punti / vettori in 2D)

$$\rho_0 = \sqrt{x_0^2 + y_0^2}$$
$$\alpha_0 = atan2(y_0, x_0)$$

x_0 , y_0
coordinate
catersiane

ρ_0 , α_0
coordinate
polari

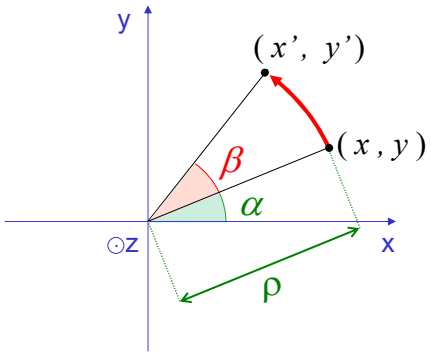
$$x_0 = \rho_0 \cdot \cos(\alpha_0)$$
$$y_0 = \rho_0 \cdot \sin(\alpha_0)$$



38

Trasf. di rotazione in 2D
(attorno all'origine, di un angolo β **generico**, in senso antiorario)

In coordinate polari,
la rotazione sarebbe banale:
l'angolo α incrementa di β,
la distanza ρ rimane invariata



partenza:
$$x = \rho \cos\alpha$$
$$y = \rho \sin\alpha$$

arrivo:
$$x' = \rho\cos(\alpha+\beta) = \rho\cos\alpha\cos\beta - \rho\sin\alpha\sin\beta = x\cos\beta - y\sin\beta$$
$$y' = \rho\sin(\alpha+\beta) = \rho\cos\alpha\sin\beta + \rho\sin\alpha\cos\beta = x\sin\beta + y\cos\beta$$

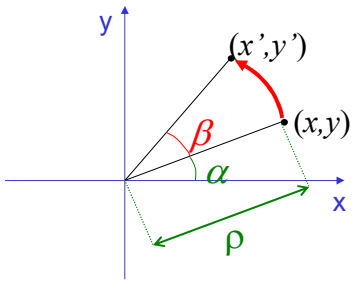
39

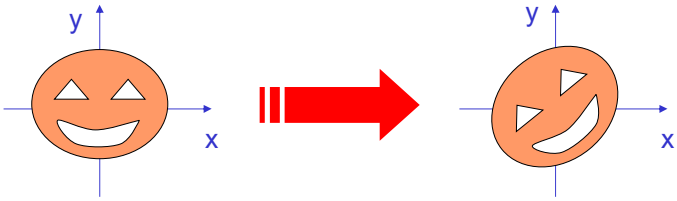
Trasf. di rotazione in 2D
(attorno all'origine, di un angolo β **generico**, in senso antiorario)

Quindi:

$$f\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x\cos\beta - y\sin\beta \\ x\sin\beta + y\cos\beta \end{pmatrix}$$

alla fine, il passaggio alle coord polari
non serve :-)
bastano il valore di seno e coseno
dell'angolo di rotazione β



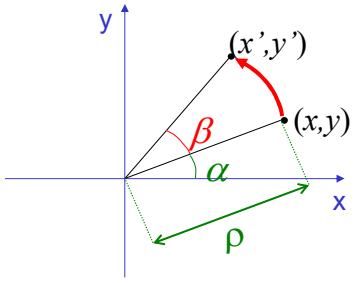


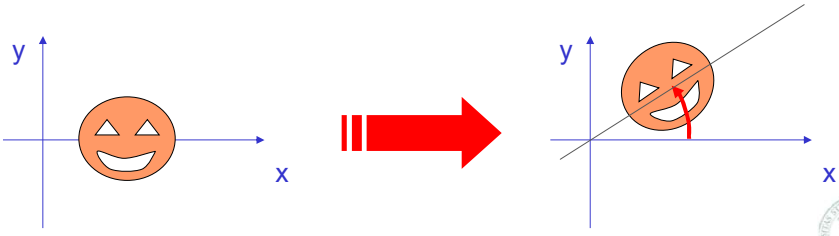
40

Trasf. di rotazione in 2D
(attorno all'origine, di un angolo β **generico**, in senso antiorario)

$$f\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x\cos\beta - y\sin\beta \\ x\sin\beta + y\cos\beta \end{pmatrix}$$

Nota: questa trasformazione
ruota attorno all'origine degli assi
(non certo attorno al centro delle figure)

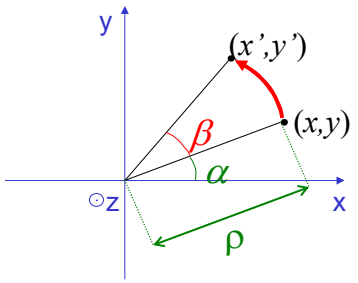


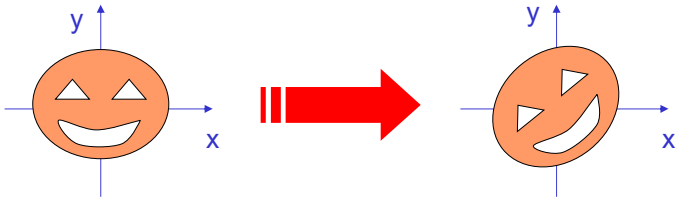


41

Trasf. di rotazione 3D attorno all'asse z
(di un angolo β)

$$f\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x\cos\beta - y\sin\beta \\ x\sin\beta + y\cos\beta \\ z \end{pmatrix}$$



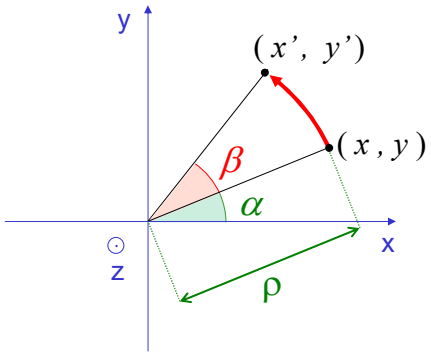


42

Torniamo in 3D:
Trasf. di rotazione attorno all'asse z (di un angolo β)

z rimane invariata

x e y ruotano



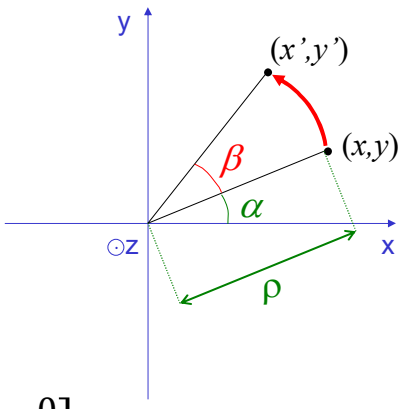
$$f\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x\cos\beta - y\sin\beta \\ x\sin\beta + y\cos\beta \\ z \end{pmatrix}$$

43

Rotazione 3D attorno all'asse z… come moltiplicazione con matrice

$$x' = x\cos\beta - y\sin\beta$$
$$y' = x\sin\beta + y\cos\beta$$
$$z' = z$$

$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \\ z' \\ 1 \end{bmatrix} = R_{Z(\beta)} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x\cos\beta - y\sin\beta \\ x\sin\beta + y\cos\beta \\ z \\ 1 \end{bmatrix}$$

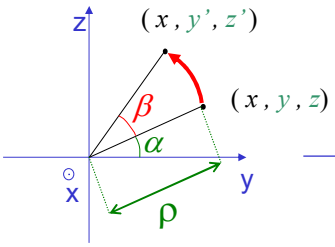


$$R_{Z(\beta)} = \begin{bmatrix} \cos\beta & -\sin\beta & 0 & 0 \\ \sin\beta & \cos\beta & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

44

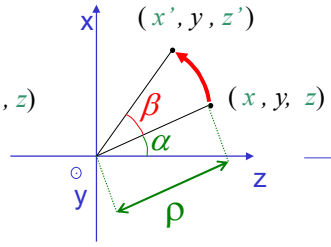
Trasf. di rotazione attorno ad uno dei tre assi

Attorno ad ASSE X



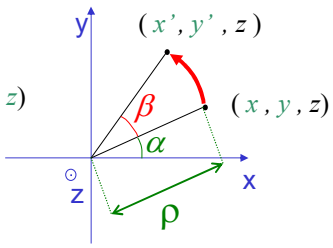
$$f\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y\cos\beta - z\sin\beta \\ y\sin\beta + z\cos\beta \end{pmatrix}$$

Attorno ad ASSE Y



$$f\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} z\cos\beta - x\sin\beta \\ y \\ z\sin\beta + x\cos\beta \end{pmatrix}$$

Attorno ad ASSE Z



$$f\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x\cos\beta - y\sin\beta \\ x\sin\beta + y\cos\beta \\ z \end{pmatrix}$$

45

Matr di Rotazione attorno all'asse x, y, o z

$$R_X(\theta) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\theta & -\sin\theta & 0 \\ 0 & \sin\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$R_Y(\theta) = \begin{bmatrix} \cos\theta & 0 & -\sin\theta & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ \sin\theta & 0 & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$R_Z(\theta) = \begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta & 0 & 0 \\ \sin\theta & \cos\theta & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

e le inverse?

$$R_X(\theta)^{-1} = R_X(-\theta) = R_X(\theta)^{\mathrm{T}}$$

46

da XKCD

$$\begin{bmatrix} \cos 90^\circ & -\sin 90^\circ \\ \sin 90^\circ & \cos 90^\circ \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_1 & a_2 \end{bmatrix}$$

http://xkcd.com/184/

47

Matrici di rotazione

- ✓ Tutte le matrici di rotazione con asse qualsiasi passante per l'origine le posso costruire componendo rotazioni sui tre assi X, Y, Z
- ✓ Loro inversa: la trasposta
- ✓ Sono matrici «ortogonali» $M \cdot M^T = I$

  (e dunque «normali» $M \cdot M^T = M^T \cdot M$)

48

Rotazioni in 3D: note

- ✓ In 3D, bisogna specificare attorno a quale asse ruotare
  - ⇒ oltre che, di quanti gradi, per convenzione sul segno: positivo se senso antiorario, nagativo se in senso orario
- ✓ Si applica nello stesso modo ai punti e ai vettori
  - ⇒ la stessa funzione viene applicata alle coordinate
- ✓ I punti sull'asse vengono mappati su se stessi
  - ⇒ e così, i vettori paralleli all'asse
- ✓ Attenzione: cumulare rotazioni in 3D non commuta!
  - ⇒ Es: ruotare attorno a X di 90° e poi a Y di 90° non è la stessa cosa di ruotare attorno a Y di 90° e poi a X di 90°

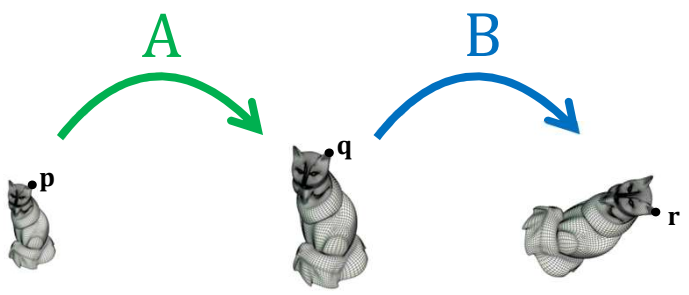
49

Trasformazioni Affini (o lineari)

- ✓ Le trasformazioni esprimibili come una moltiplicazione per una matrice 4x4 del vettore delle coordinate omogenee sono dette «affini»
- ✓ E' classe di trasformazioni particolarmente utile in Computer Graphics
  - ⇒ (quasi) tutte le trasformazioni spaziali che ci interessano appartengono a questa classe
- ✓ Comprende tutte le trasformazioni che abbiamo visto fin'ora
  - ⇒ traslazione, scalatura uniformi e non, rotazione
  - ⇒ E ogni loro combinazione (come è facile vedere, se f è affine e g è affine anche $f \circ g$ è affine
  - ⇒ Quali altre? La lista è quasi completa: include anche lo shearing (vedi dopo)

50

Composizione di trasnformazioni affini

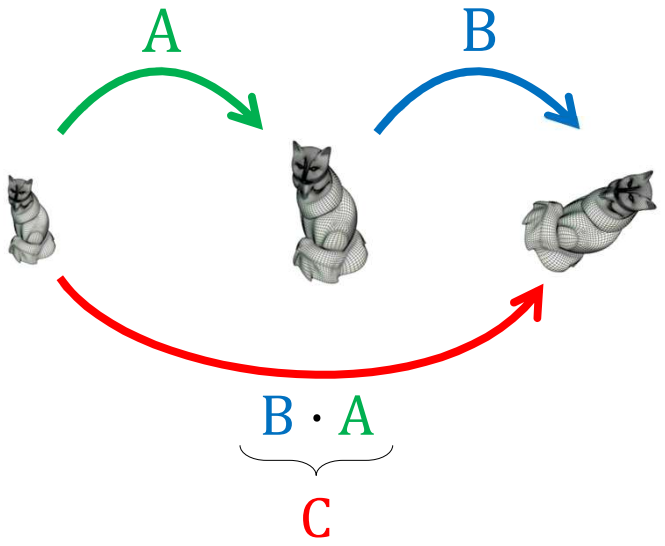


$$\mathbf{q} = A \cdot \mathbf{p}$$

$$\mathbf{r} = B \cdot \mathbf{q} = B \cdot (A \cdot \mathbf{p}) = \overbrace{(B \cdot A)}^{C}\, \mathbf{p}$$

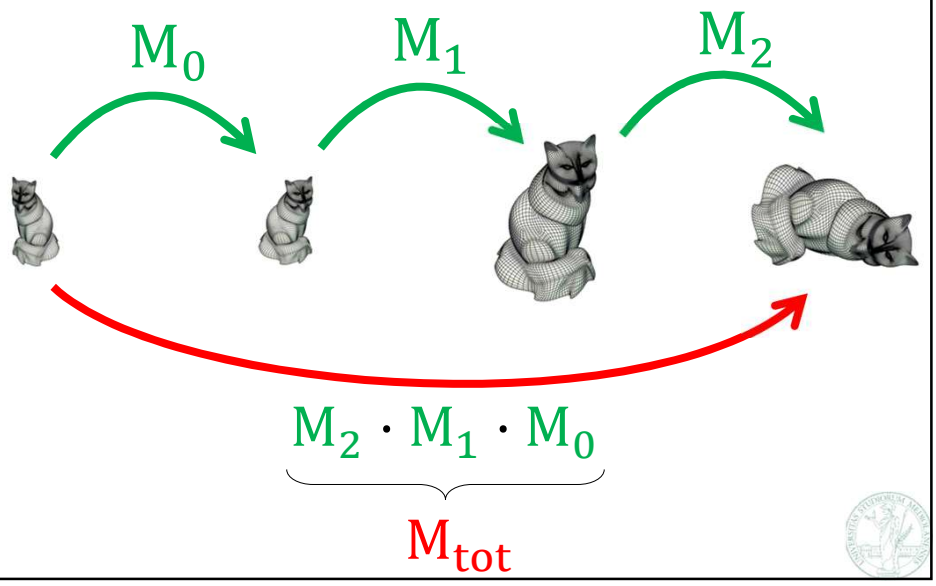
51

Composizione di trasnformazioni affini



52

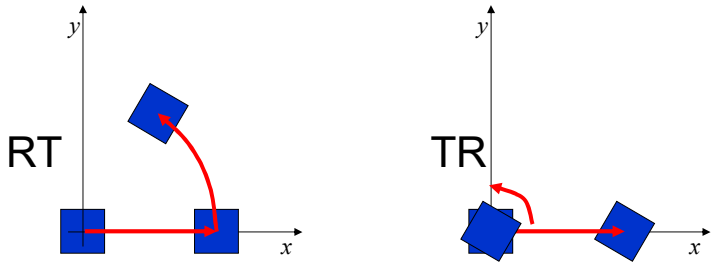
Composizione di trasnformazioni affini



53

Ripasso: moltiplicazione fra matrici 1/2 (cioè composizione di trasformazioni)

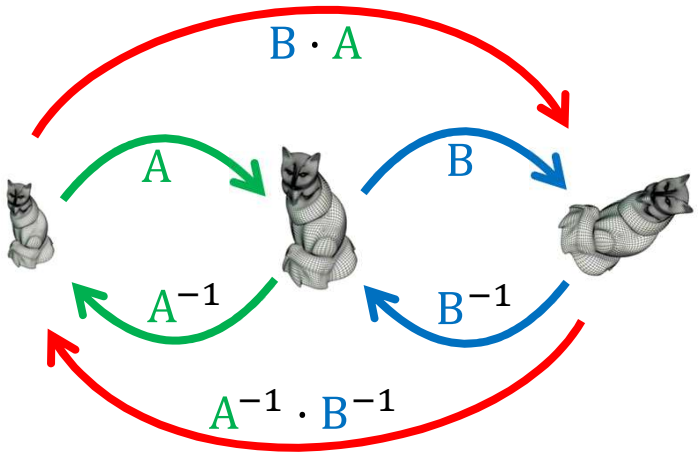
- ✓ Associativa: $A(BC) = (AB)C$
- ✓ Ma non commutativa! $AB \neq BA$
  - ⇒ previsione:
    determinare il corretto ordine delle trasformazioni non sarà intuitivo



54

Ripasso: moltiplicazione fra matrici 1/2 (cioè composizione di trasformazioni)

- ✓ Attenzione all'inversione: $(B \cdot A)^{-1} = A^{-1} \cdot B^{-1}$



55

Eseguire sequenze di trasformazioni: note

✓ Le trasf affini sono chiuse per composizione.

…infatti…

✓ La moltiplicazione è associativa

$$\mathrm{M_A} \cdot (\mathrm{MB} \cdot \mathrm{p}) = (\mathrm{M_A} \cdot \mathrm{M_B}) \cdot \mathrm{p}$$

⇒ La matrice $\mathrm{M_A}$ «fa» una data trasf f_A

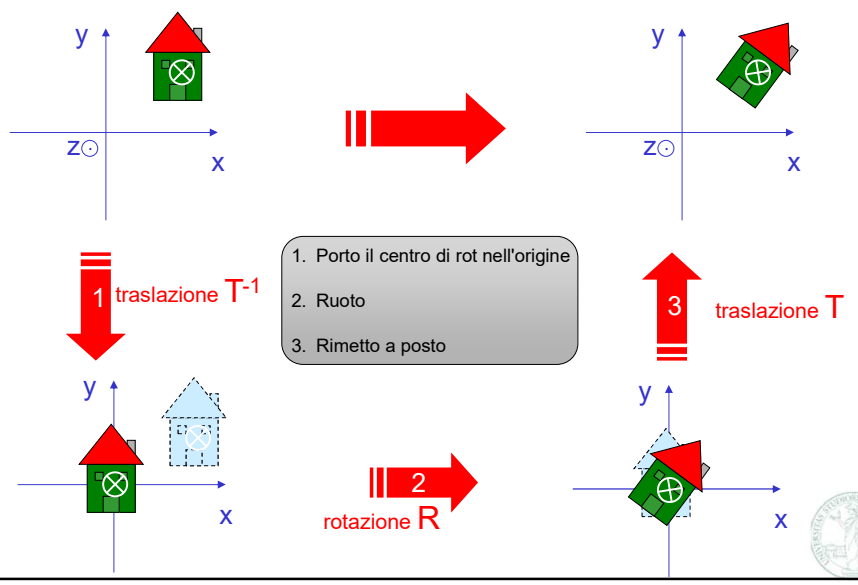
⇒ La matrice $\mathrm{M_B}$ «fa» una data trasf f_B

⇒ La matrice $(\mathrm{M_A} \cdot \mathrm{M_B})$ «fa» la trasf f_B, seguita da f_A

✓ Due (oppure n) trasformazioni al prezzo di una!

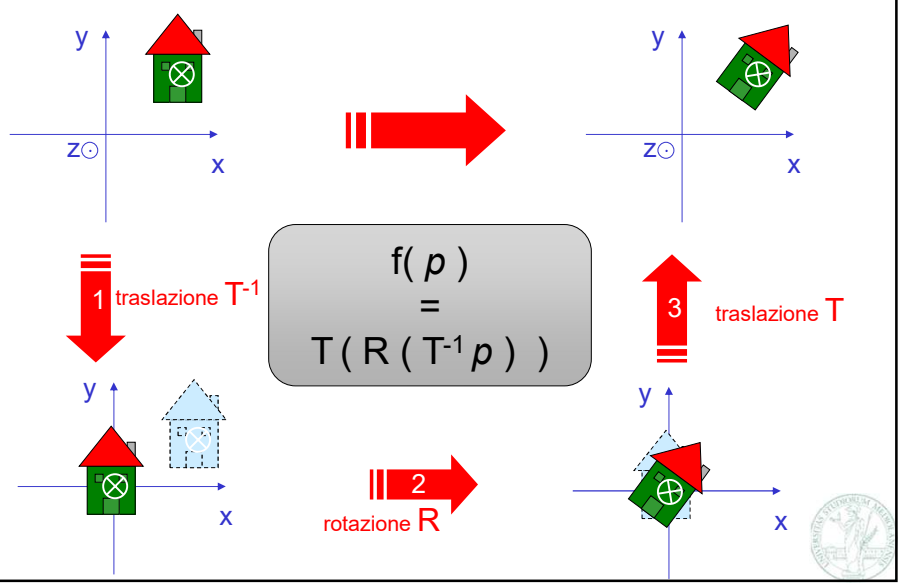
56

Rotazione intorno ad un asse *parallelo* all'asse z (ottenuta componendo trasformazioni)



57

Rotazione intorno ad un asse *parallelo* all'asse z (ottenuta componendo trasformazioni)



58

Rotazione intorno ad un asse *parallelo* all'asse z (ottenuta componendo trasformazioni)

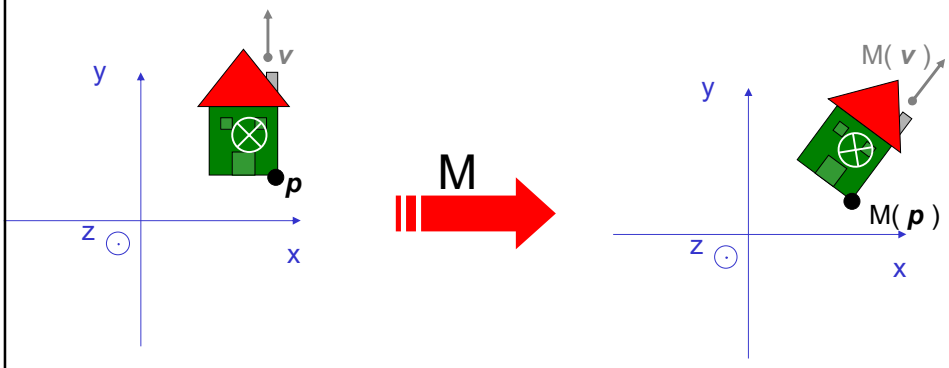
✓ Moltiplicazione matrici (vettori) ha la propretà associativa

$$f(p) = T\,(\,R\,(\,T^{-1}\,p\,)\,)$$
$$= \underbrace{(T\,R\;\;T^{-1})}_{\text{una matrice } M \text{ 4x4 che fa tutto.}}\,p$$

- considerazioni sull'efficienza
- cosa possiamo dire sulla forma di M ?
- cosa succede se moltiplichiamo un *vettore* per M ?

59

Punti VS vettori



p **= (* , * , * , 1)** punto all'angolo della casa **(punto)**
v **= (* , * , * , 0)** velocità vettoriale del fumo **(vettore)**

60

Trasformazioni spaziali affini: alcune sottocategorie

⇒**Isometriche**: mantengono le distanze fra punti
- dette anche trasformazioni **rigide**
- sono solo traslazioni e rotazioni (e combinazioni) (a volte, anche le simmetrie di piano sono considerate nella categoria)
- dette anche (informalmente) **rototraslazioni**

⇒**Conformali**: mantengono gli angoli (fra i vettori)

⇒**Volume (/area) preserving**: mantengono i volumi (le aree, in 2D)
- Vale, se la matrice ha determinante = 1

⇒**Invertibili**: se esiste la trasformazione opposta
- Vale, se la matrice ha determinante ≠ 0

61

Trasformazioni spaziali affini : definizioni equivalenti

- ✓ Le trasf.spaziale affini sono tutte e sole quelle esprimibili come una pre-moltiplicazione del vettore di coordinate omogenee con una matrice 4×4 (la cui ultima riga è 0,0,0,1)
- ✓ Una trasf. è affine quando la X,Y e Z dell'output sono date da *funzioni lineari* della X,Y e Z dell'input
- ✓ Una trasf. è affine quando:
  dati due vettori $\mathbf{v_0}$ $\mathbf{v_1}$ vale:

$$f(a\mathbf{v_0} + b\mathbf{v_1}) = a\, f(\mathbf{v_0}) + b\, f(\mathbf{v_1})$$

  e dato un vettore $\mathbf{v}$ e un punto $\mathbf{p}$ vale:

$$f(\mathbf{p} + a\,\mathbf{v}) = f(\mathbf{p}) + a\, f(\mathbf{v})$$

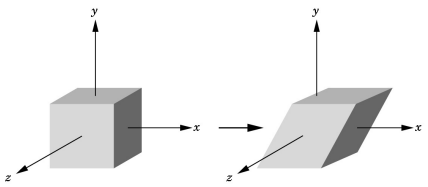
- ✓ Tutte quelle cha abbiamo visto appartengono a questa categoria
  ⇒ Quali altre? Lo shearing

63

Shearing

✓ Es: spostamento in *x* proporzionale alla pos *y*

$$x' = x + y\cot\theta$$
$$y' = y$$
$$z' = z$$



$$H_{xy}(\theta) = \begin{bmatrix} 1 & \cot\theta & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

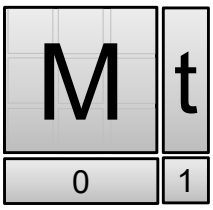
matrice di shearing

64

La matrice 4x4 corrispondente ad una trasformazione affine

Questa sottomatrice 3x3 si applica alle coord cartesiane sia dei punti che dei vettori

Ultima riga: (0,0,0,1)
Così che i punti vengano mappati sempre in punti, e i vettori sempre in vettori



Matrice 4x4

Questo vettore t si somma al risultato quando trasformo punti (ma viene azzerato quando trasformo vettori).

65

Operazioni su matrici e loro significato sulla trasformazione corrispondente

- ✓ Matrice identità = trasformazione identità
  - ⇒ trasforma ogni punto o vettore in se stesso
- ✓ Matrice inversa = trasformazione inversa
  - ⇒ se esiste
- ✓ Determinante della matrice 4x4 = (è anche il determinante della sottomatrice 3x3)
  - ⇒ Moltiplicatore del volume
  - ⇒ Per es, determinante = 0.5: questa matrice riduce i volumi degli oggetti trasformati del 50%
- ✓ Deficit di rango della matrice:
  - ⇒ cioè rango massimo (4) meno rango della matrice)
  - ⇒ È la perdita di dimensionalità
  - ⇒ Per es: rango 3 (invece di 4): la trasf. riduce oggetti 3D a oggetti piatti.
  - ⇒ Per es: rango 2 (invece di 4): la trasf. riduce oggetti 3D a linee
  - ⇒ Per es: rango 1 (invece di 4): la trasf. riduce oggetti 3D ad un punto

66

Calcolo dell'inversa di una matrice di trasformazione affine

- ✓ Potremmo applicare un algoritmo generico di inversione di matrici 4x4
- ✓ Possiamo sfruttare la caratteristica che l'ultima riga è (0,0,0,1) per semplificare il conto
  - ⇒ il prob si riduce all'inversione di una matrice 3x3
- ✓ Come abbiamo visto, molte delle matrici di trasformazioni utili sono casi particolari che ammettono metodi molto più semplici (ed efficienti) per calcolarne l'inversa
  - ⇒ Vedi inversa di: traslazione, scalatura, rotazione e di composizione di matrici

67

Inversione di una affine generica

nb: $(A\,B)^{-1} = B^{-1}\,A^{-1}$

$$\begin{bmatrix} M & t \\ 0 & 1 \end{bmatrix}^{-1} = \left(\begin{bmatrix} I & t \\ 0 & 1 \end{bmatrix} * \begin{bmatrix} M & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \right)^{-1} =$$

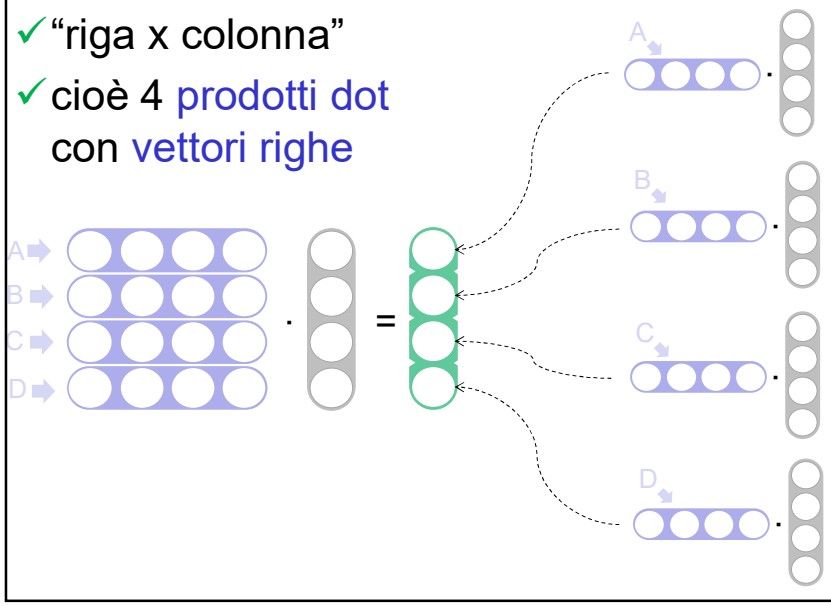
$$= \begin{bmatrix} M^{-1} & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} * \begin{bmatrix} I & -t \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} M^{-1} & \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$M^{-1} * -t$$

68

Ripasso: prodotto Matrice × Vettore («riga per colonna»)

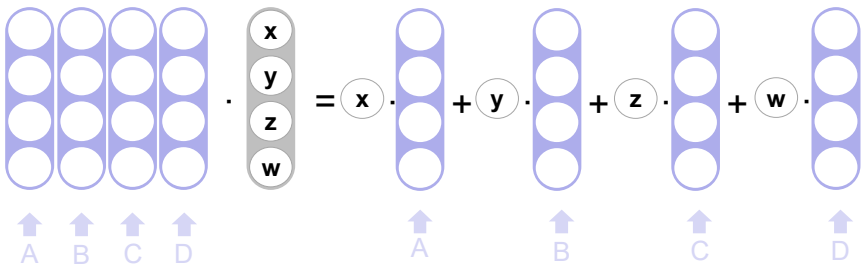
- ✓ "riga x colonna"
- ✓ cioè 4 prodotti dot con vettori righe



69

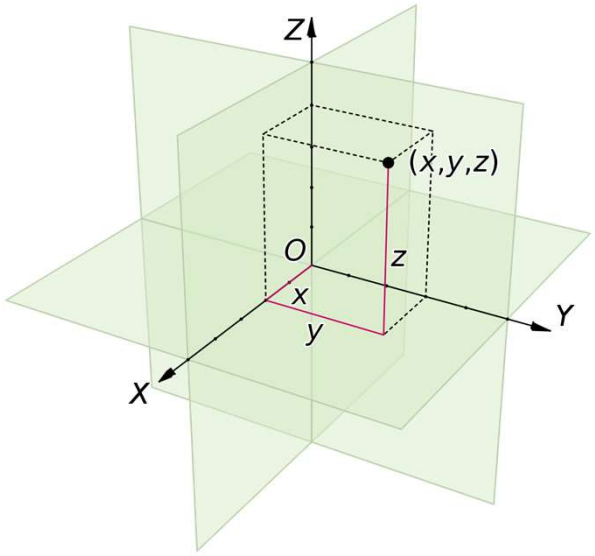
Ripasso: prodotto Matrice × Vettore («riga per colonna»)

- ✓ Posso scriverlo come: combinazione lineare dei vettori colonna della matrice



70

Sistema di riferimento (in cui esprimere punti e vettori)



71

Sistema di riferimento: note

- ✓ Fin'ora, abbiamo assunto che il Sistema di riferimento (usato per esprimere punti e vettori) fosse quello canonico che:
  - ⇒E' ortogonale (gli assi ortogonali fra loro)
  - ⇒Ha gli assi unitari
  - ⇒L'origine è in (0,0,0)
- ✓ Un Sistema di riferimento può non essere ortogonale

72

Base vettoriale o spazio vettoriale

- ✓ Definita da tre vettori asse (linearmente indipendenti) $\{\vec{a}_x, \vec{a}_y, \vec{a}_z\}$
- ✓ Posso esprimere (univocamente!) ogni vettore $\vec{v}$ come:

$$\vec{v} = x\,\vec{a}_x + y\,\vec{a}_y + z\,\vec{a}_z$$

- ✓ cioè:

$$\vec{v} = \begin{bmatrix} \vec{a}_x & \vec{a}_y & \vec{a}_z & * \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ 0 \end{bmatrix}$$

coordinate *omogenee* di $\vec{v}$

73

Sistema di riferimento o reference *frame* (oppure anche uno *spazio*)

- ✓ Definito da
  - ⇒ una base vettoriale $\{\vec{a}_x, \vec{a}_y, \vec{a}_z\}$ (gli assi dello spazio)
  - ⇒ un punto di *origine* $\mathbf{p}_o$
- ✓ Posso esprimere (univocamente!) ogni punto $\mathbf{p}$ come:

$$\mathbf{p} = \mathbf{p}_o + x\,\vec{a}_x + y\,\vec{a}_y + z\,\vec{a}_z$$

- ✓ cioè:

$$\mathbf{p} = \begin{bmatrix} \vec{a}_x & \vec{a}_y & \vec{a}_z & \mathbf{p}_o \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ 1 \end{bmatrix}$$

coordinate *omogenee* di $\mathbf{p}$

74

Sistema di riferimento canonico (quello che abbiamo tacitamente assunto finora)

- ✓ Assi: $\vec{a}_x = (1,0,0)$
  $\vec{a}_y = (0,1,0)$
  $\vec{a}_z = (0,0,1)$
- ✓ Origine: $\mathbf{p_o} = (0,0,0)$
- ✓ Quindi, matrice associata: $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = I$

75

Cambio di Sistema di riferimento (o spazio)

- ✓ ogni trasformazine affine può quindi essere interpretata come un *cambio di sistema di riferimento*
- ✓ e le colonne della matrice descrivono
  - ⇒3 assi
  - ⇒origine

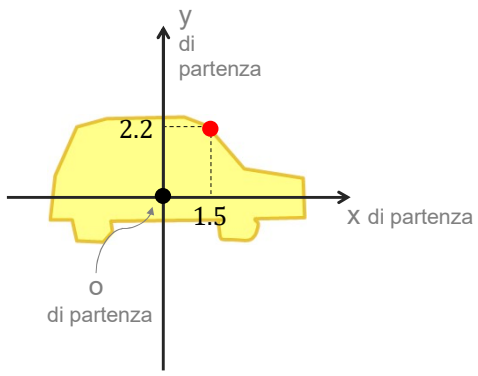
  dello spazio di partenza
  descritte nelle coordinate dello spazio di arrivo

76

Es: traslazione

$$\begin{bmatrix} +1 & 0 & 0 & +7 \\ 0 & +1 & 0 & +3 \\ 0 & 0 & +1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & +1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1.5 \\ 3.8 \\ 0.0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 8.5 \\ 6.8 \\ 0.0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

matrice per passare dal frame di partenza al frame di arrivo

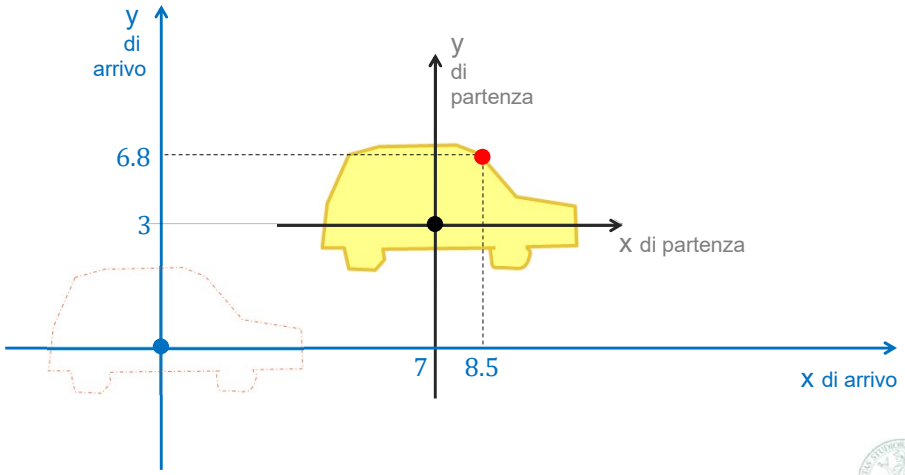


78

Es: traslazione

$$\begin{bmatrix} +1 & 0 & 0 & +7 \\ 0 & +1 & 0 & +3 \\ 0 & 0 & +1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & +1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1.5 \\ 3.8 \\ 0.0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 8.5 \\ 6.8 \\ 0.0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

matrice per passare dal frame di partenza al frame di arrivo



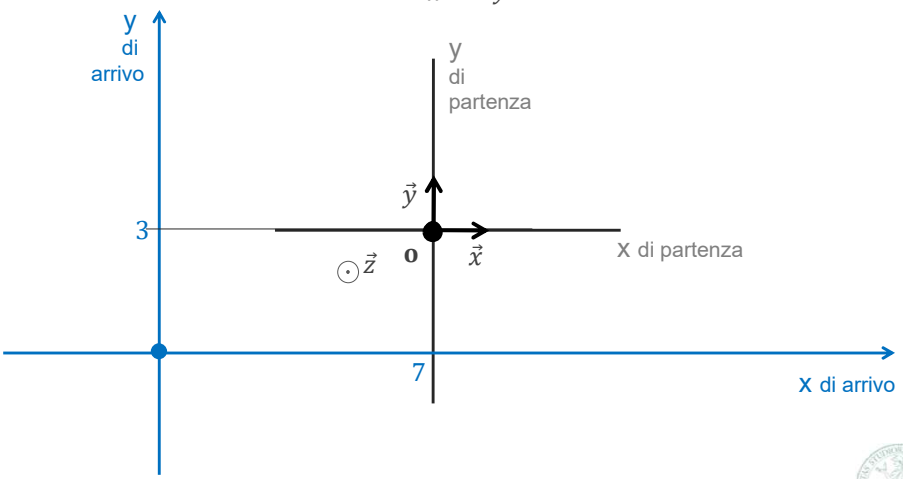
79

Es: traslazione

$$\begin{bmatrix} +1 & 0 & 0 & +7 \\ 0 & +1 & 0 & +3 \\ 0 & 0 & +1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & +1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1.5 \\ 3.8 \\ 0.0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 8.5 \\ 6.8 \\ 0.0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

matrice per passare dal frame di partenza al frame di arrivo

$\vec{x}$ $\vec{y}$ $\vec{z}$ $\mathbf{o}$

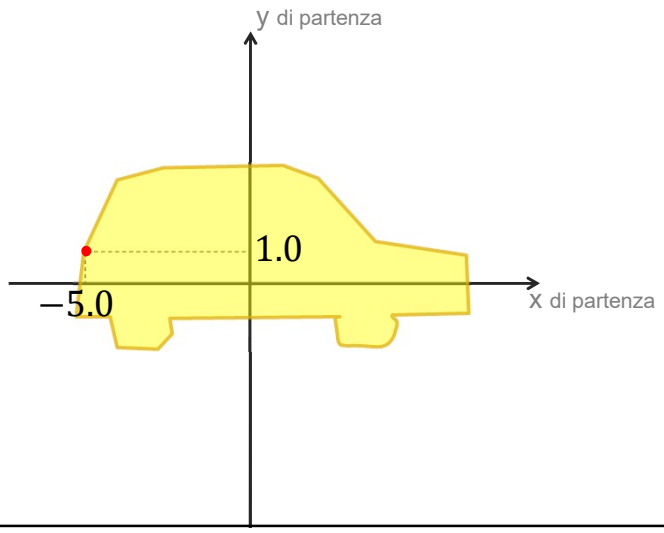


80

Es: rot di 45° su Z

$$\begin{bmatrix} +0.7 & -0.7 & 0 & 0 \\ +0.7 & +0.7 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & +1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & +1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -5.0 \\ 1.0 \\ 0.0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -4.4 \\ -2.8 \\ 0.0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

matrice per passare dal frame di partenza al frame di arrivo

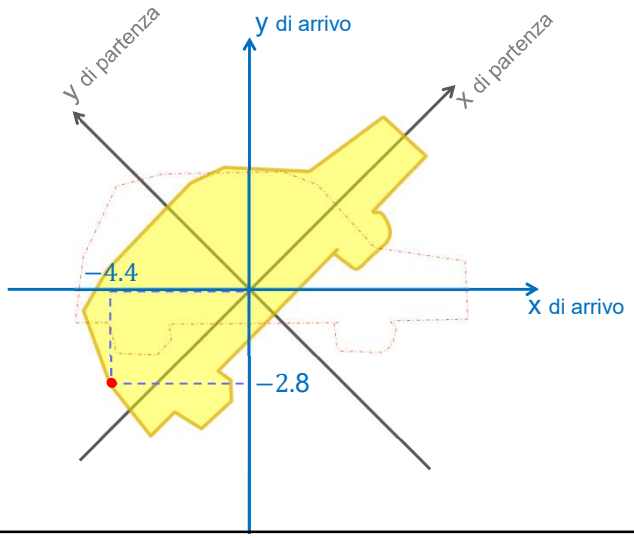


81

Es: rot di 45° su Z

$$\begin{bmatrix} +0.7 & -0.7 & 0 & 0 \\ +0.7 & +0.7 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & +1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & +1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -5.0 \\ 1.0 \\ 0.0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -4.4 \\ -2.8 \\ 0.0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

matrice per passare dal frame di partenza al frame di arrivo



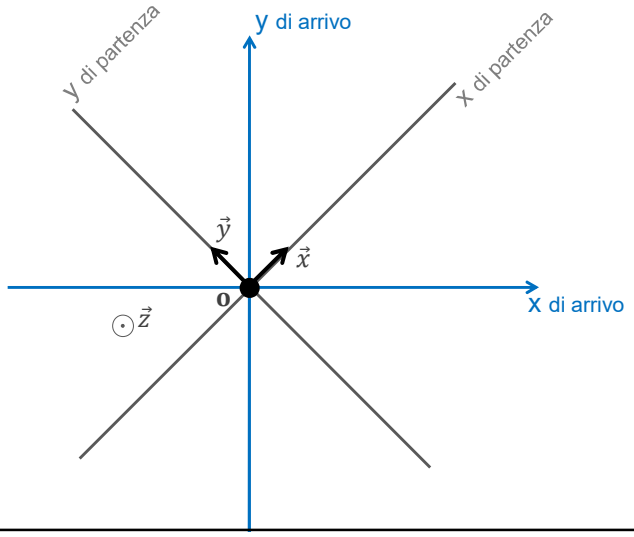
82

Es: rot di 45° su Z

$$\begin{bmatrix} +0.7 & -0.7 & 0 & 0 \\ +0.7 & +0.7 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & +1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & +1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -5.0 \\ 1.0 \\ 0.0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -4.4 \\ -2.8 \\ 0.0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{array}{cccc} \uparrow & \uparrow & \uparrow & \uparrow \\ \vec{x} & \vec{y} & \vec{z} & \mathbf{o} \end{array}$$

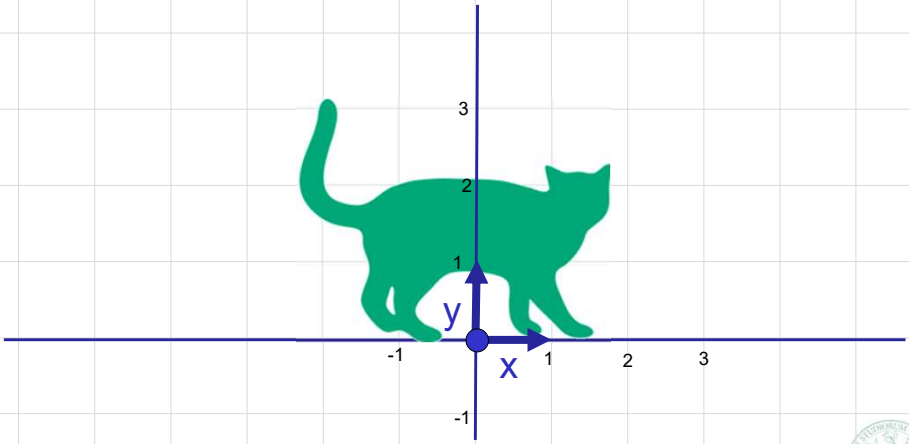
matrice per passare dal frame di partenza al frame di arrivo



83

Esempio 2 (disegno del piano Z = 0)

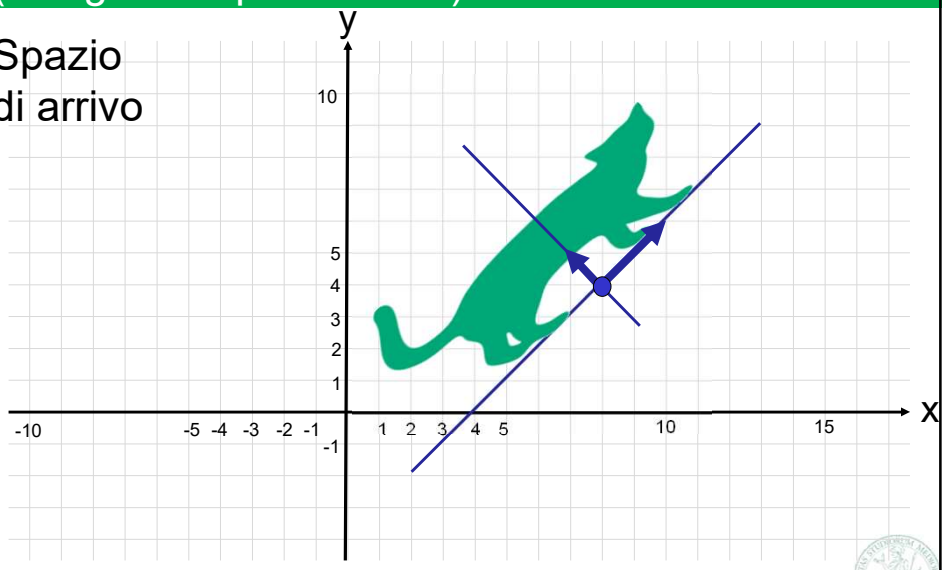
Spazio di partenza



87

Esempio 2 (disegno del piano Z = 0)

Spazio di arrivo



88

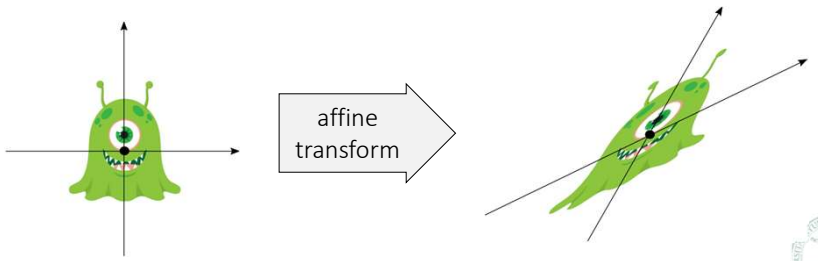
Esercizio 2

1. Scrivi la matrice che porta dallo spazio di partenza mostrato allo spazio di arrivo mostrato
2. Applica la matrice trovata al punto **p**,
   che nello spazio di partenza
   ha coordinate cartesiane (-2,3,0)
   (la punta della coda)
   ottenendo le coordinate **p**' dello stesso punto nello spazio di arrivo
3. Invertire la matrice
4. Applicare la matrice inversa per ottenere le coordinate, nello spazio di partenza, del punto che nello spazio di arrivo ha coordinate (9,8,0)
   (circa, un punto sul naso del gatto)

89

Un modo di interpretare qualsiasi trasformazione affine

- ✓ In pratica la trasfromazione ridefinisce un nuovo sistema di rifermimento
  - ⇒3 assi + origine
- ✓ L' oggetto è ridefinito sul nuovo sistema di riferimento



90