

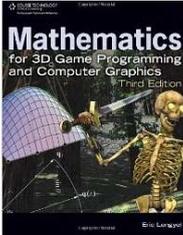
Marco Tarini - Computer Graphics 2021/2022
Università degli Studi di Milano

Algebra di Punti e Vettori

1

Algebra di punti e vettori – come studiare

- ✓ Anche se non si tratta di CG, queste basi sono necessarie ad una piena comprensione degli argomenti
 - ⇒ (e vengono chieste all'esame)
- ✓ Come appianare le eventuali lacune:
 - ⇒ Libri di testo consigliati
 - ⇒ In rete



Possibile libro di testo:
Mathematics for 3D Games and Computer Graphics
Eric Lengyel
Chapters 2, 3

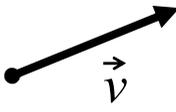


2

Punti e vettori: cosa rappresentano

<p>✓ Punto</p> <p>⇒ una posizione nello spazio</p>	<p>✓ Vettore (geometrico)</p> <p>⇒ uno spostamento nello spazio</p> <p>⇒ Il delta fra due posizioni</p> <p>⇒ nota: non è riferito ad una specifica posizione!</p> <p>⇒ ha una <i>lunghezza</i> e una <i>direzione</i></p>
---	---

Punti e vettori: spesso disegnati come...

<p>✓ un pallino</p> <div style="text-align: center; margin-top: 10px;">  </div>	<p>✓ una freccia</p> <div style="text-align: center; margin-top: 10px;">  </div>
--	--



3

Punti & Vettori Geometrici

	representa:	esempi:	Immaginali / disegni come...
a Punto	Una posizione, una locazione	Dove sta qualcosa Il centro di una sfera	Un piccolo pallino :-D
un Vettore	Uno spostamento La differenza spaziale fra due punti Il vettore che li connette	La velocità di un oggetto L'accelerazione di gravità Come raggiungere A da B	Una freccetta :-D (con una data direzione e lunghezza) (nota: non è relativa a nessuna posizione particolare)
uno scalare	Una qualità reale (positiva o negativa)	Il peso di una persona L'area di un triangolo	-



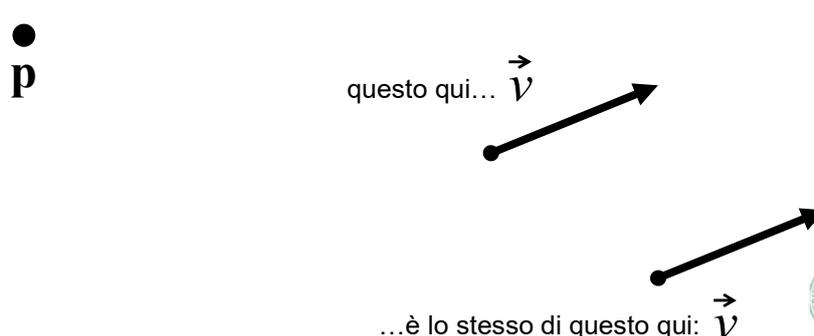
4

Punti e vettori: disegnati come

✓ Punti: un pallino

✓ Vettori: una freccetta

⇒ Nota:
La freccetta sarà pur disegnata da qualche parte, ma non ha una posizione



5

Algebra di punti e vettori

✓ Accertati di comprendere ogni operazione che vedremo dal punto di vista:

-  **intuitivo / spaziale :**
cosa "fa" l'operazione dal punto di vista geometrico
-  **operazionale:** come computare il risultato a partire
(1) dalle coordinate degli operandi
(2) per i prodotti di vettori: anche dalle loro lunghezze e gli angoli
-  **sintattico:** come scrivere le operazioni
(1) su carta (con che notazione)
(2) in un linguaggio di programmazione
(per es; in lib C++, o un linguaggio come GLSL...)



7

Algebra di punti e vettori

✓ Inoltre, familiarizza con le loro



regole algebriche delle operazioni, come

- ⇒ è commutativa?
- ⇒ è commutativa?
- ⇒ distribuisce? (con un'altra op)
- ⇒ è invertibile?
- ⇒ quale è l'op inversa?
- ⇒ ha un elemento neutro? Un elemento assorbente?



8

Rappresentazione interne di punti e vettori

✓ triplete di **Coordinate Cartesiane**

⇒ Ciascuna, un valore scalare

⇒ Per es:

```
class Vector3 {  
  // fields:  
  public float coords[3];  
  
  // methods:  
  ...  
}
```

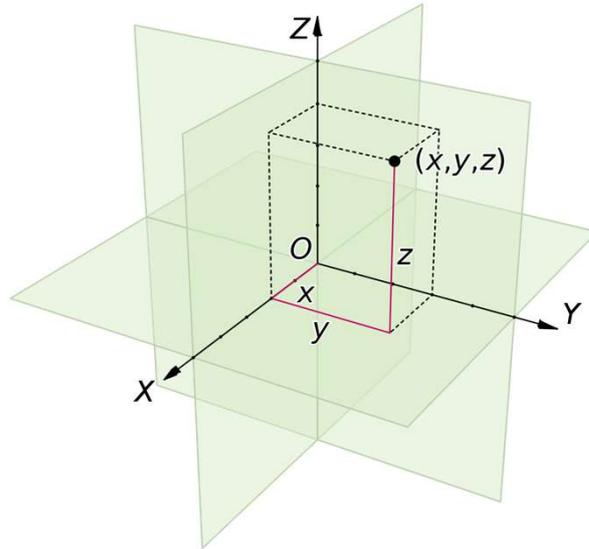
oppure:

```
class Vector3 {  
  // fields:  
  public float x, y, z;  
  
  // methods:  
  ...  
}
```



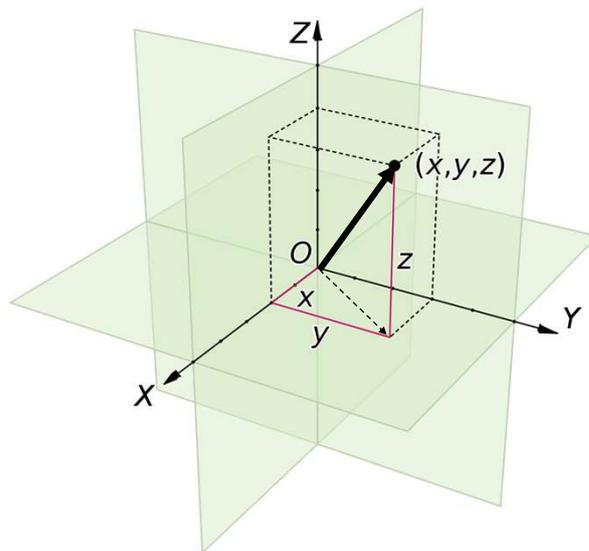
9

Espresso in Sistema di coordinate ("Cartesiano")



10

Espresso in Sistema di coordinate ("Cartesiano")



11

Coding: 1 struttura dati, tante semantiche

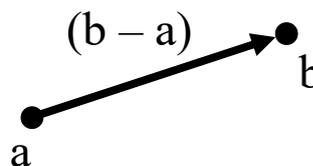
- ✓ Molte librerie e linguaggi usano uno stesso **data type** sia per punti 3D che per vettori 3D (e altro: versors, colori...)
 - ⇒ “vec3d”, “Point3D”, “vector” etc – vedi lab
- ✓ Tuttavia, la semantica non è la stessa
 - ⇒ Nulla di strano!
 - ⇒ Usiamo comunemente uno stesso tipo (“float”, “double”) per rappresentare cose molto diverse fra loro (per es, un peso, un volume, una temperatura).
- ✓ E' responsabilità del programmatore operare su questi dati in modo coerente.
 - ⇒ Per es: non ha senso sommare una temperatura con un'area
 - ⇒ Pe es: ha senso dividere un peso per un volume (e si ottiene un peso specifico)
- ✓ Quali operazioni hanno senso fra punti, vettori e scalari?
 - ⇒ Cioè: quale è la loro algebra?



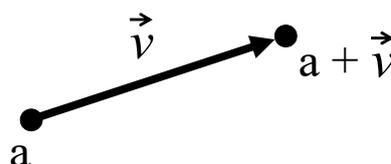
12

Point and vector algebra (summary)

- ✓ Differenza:
punto – punto = vettore



- ✓ Somma:
punto + vettore = punto



13

Vector algebra: somma fra vettori

✓ vettore + vettore = vettore

14

Vector algebra: scalatura di un vettore

✓ scalare · vettore = vettore

15

Vector algebra: scalatura di un vettore (note)

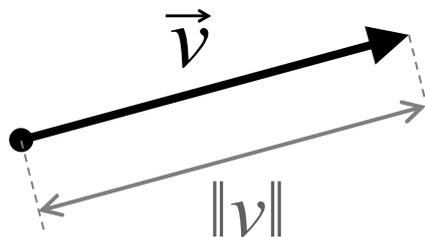
- ✓ Scalare un vettore di un fattore scalare k lascia inalterata la sua direzione ma moltiplica la sua lunghezza per k
- ✓ Se $k > 1$: lo allunga
Se $k = 1$: lo lascia inalterato
- ✓ Se k fra 0 e 1: lo accorcia
- ✓ Se $k = 0$: otteniamo il vettore detengere
 - ⇒ Il vettore $(0,0,0)$: l'unico vettore lungo 0;
 - ⇒ degenerare perché non ha una direzione
- ✓ Se k fra -1 e 0: lo accorcia e lo ribalta
 - ⇒ Cioè inverte la direzione
- ✓ Se $k = -1$: lo ribalta
- ✓ Se $k < -1$: lo ribalta e lo allunga



16

Point and vector algebra: norma

- ✓ norma di un vettore = uno scalara



17

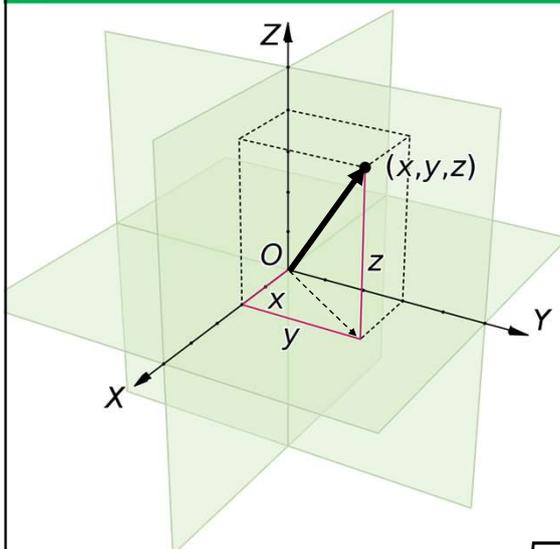
Norma di un vettore

- ✓ Terminologia: detta anche:
 - ⇒ lunghezza, magnitudine, intensità, estensione, norma, norma-2, norma Euclidea
- ✓ Scritta come $\|\vec{v}\|$ o $\|\vec{v}\|_2$ o $|\vec{v}|$
- ✓ Scritta nel codice (in librerie o linguaggi) come funzione o metodo `length(v)` o `v.length()` o `v.norm()`
- ✓ Rappresenta l'estensione di un vettore



18

Calcolo della norma



Applicando il teorema di pitagora (2 volte):

$$\|\vec{v}\| = \sqrt{v_x^2 + v_y^2 + v_z^2}$$



19