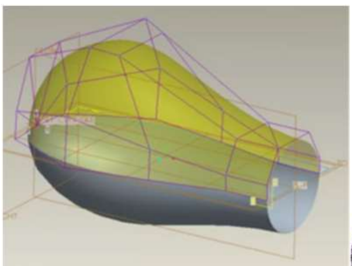
Una (imperfetta) categorizzazione dei tipi di modelli digitali 3D

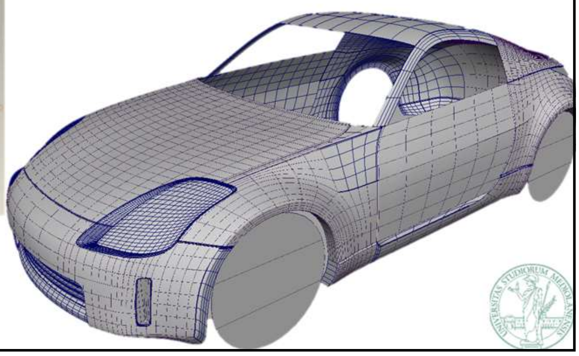
		ELEMENTI DISCRETI			CONTINUI
		regolari *«a griglia»*	semi-regolari o irregolari elementi simpliciali	semi-regolari o irregolari elementi non simpliciali	
SUPERFICIALI	2-manifold *«rappresenta una vera superficie»*	**Height Field** **Range Scan** **Geometry Images**	**Triangle Mesh**	**Polygonal Mesh** **Quad Mesh** **Quad dominant Mesh**	**Subdivision surfaces** **Parametric Surfaces**
SUPERFICIALI	non-manifold *«non rappresenta una sup»*	**Set di Range Scan**	**Point Cloud**		
VOLUM ETRICI	(3-manifold)	**Voxelized Volume** **Volumetric Textures**	**Tetra Mesh**	**Hexa Mesh**	**Implicit models** **(es. CSG)**

3

Superfici parametriche

- ✓ Modo di rappresentare superfici curve
- ✓ Non solo «lineari a tratti» (come le mesh) ma «quadratiche (o cubiche, o quartiche) etc. a tratti»
- ✓ Molto utilizzato per CAD/CAM

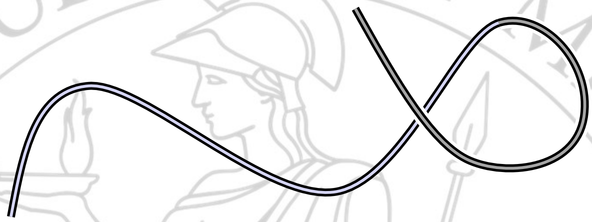




4

Marco Tarini - Computer Graphics 2022/2023
Università degli Studi di Milano

Parametric Curves



5

Miniripasso su terminologia delle funzioni in generale

Una funzione

Il dominio di f

Il codominio di f

$$f : \mathrm{A} \rightarrow \mathrm{B}$$

$$f(a) = b$$

$a \in \mathrm{A}$ $\qquad$ $b \in \mathrm{B}$

Immagine di f :
insieme di elementi del codominio di f raggiunti da f

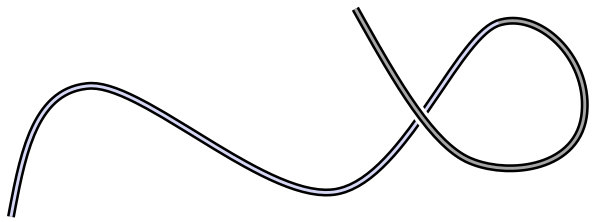
$$\text{immagine}(f) = \{b \in \mathrm{B}\,.\ \exists\, a \in \mathrm{A}.\, f(a) = b\}$$

Esempio: $f : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$, $f(x) = 2x$
dominio di f : numeri naturali
codominio di f : numeri naturali
immagine di f : numeri naturali pari

6

Curve parametriche

- ✓ Vediamo prima un caso più semplice (ma pure molto usato): le curve parametriche
  - ⇒Una rappresentazione per linee curve (in 2D o 3D)
- ✓ Il caso superfici sarà una sua generalizzazione



7

Curva parametrica

- ✓ Curva descritta come immagine di una funzione

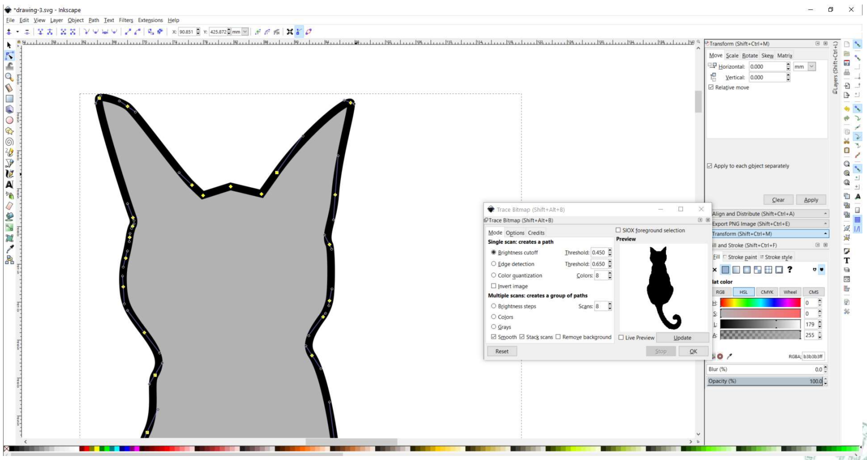
$$f: \mathrm{A} \rightarrow \mathrm{B}$$
$$\mathrm{A} \subseteq \mathbb{R}$$
$$\mathrm{B} = \mathbb{R}^2 \; o \; \mathbb{R}^3$$

- ✓ $\mathrm{B} = \mathbb{R}^2$ curve in 2D (linee disegnte su di un foglio) $\quad f(t) = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$
- ✓ $\mathrm{B} = \mathbb{R}^3$ curve in 3D (linee che “volano” nello spazio) $\quad f(t) = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$
  - ⇒ La curva è quindi “l’immagine di una funzione da $\mathbb{R}$ a $\mathbb{R}^2$ (o $\mathbb{R}^3$)”
- ✓ t è detto il parametro, o la posizione parametricha
- ✓ A, il dominio di f , e detto il “dominio parametrico”
- ✓ B, l’immagine di f , la nostra curva (un luogo di punti)
- ✓ Se $f(t)$ è un polinomio di t, la curva di dice polinomiale

8

Usi delle curve parametriche: in 2D

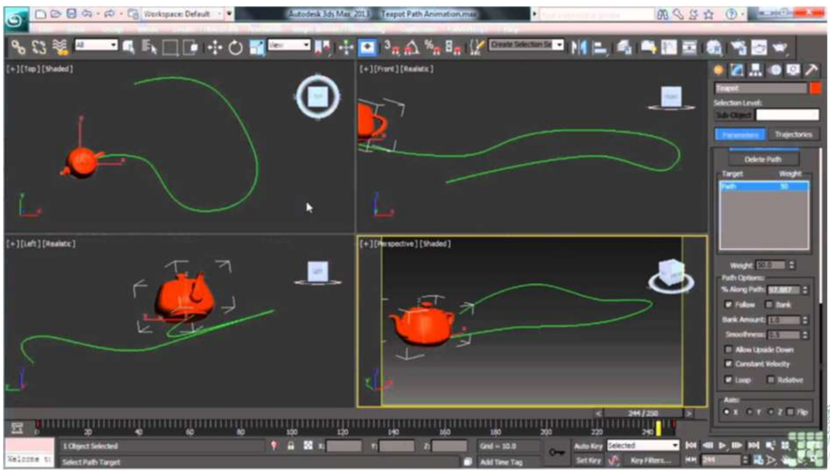
- ✓ Design di grafica vettoriale



9

Usi delle curve parametriche: in 2D o 3D

- ✓ in Computer Animation: rappresenta la traiettoria di un oggetto
  - ⇒ la coordinata parametrica t rappresenta il tempo
  - ⇒ $f(t)$ = la posizione dell'oggetto al tempo t

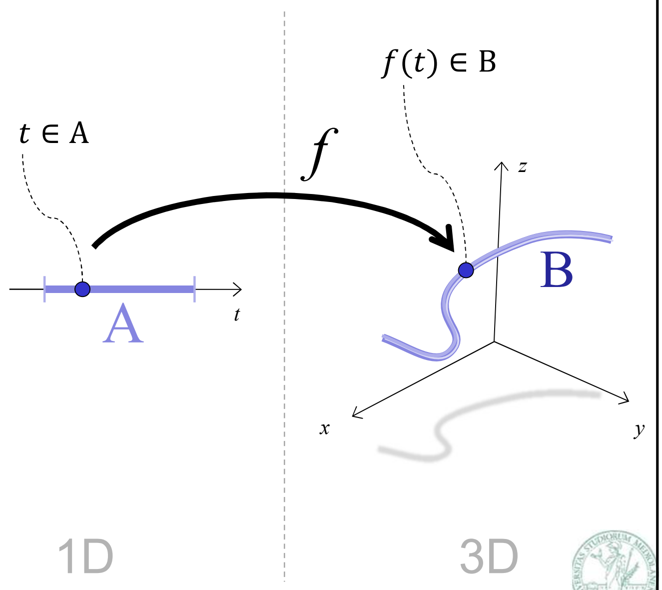


10

Curva parametrica

$$f: \mathrm{A} \to \mathrm{B}$$
$$\mathrm{A} \subseteq \mathbb{R}$$
$$\mathrm{B} \subseteq \mathbb{R}^3$$

$$f(t) = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$



11

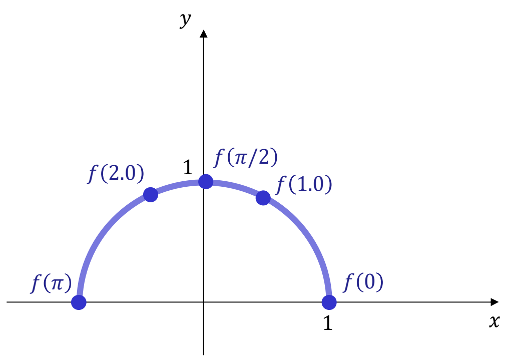
Esempio

✓ Un arco di cerchio 2D (unitario) come curva parametrica

$$f(t) = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos(t) \\ \sin(t) \end{pmatrix}$$

$$t \in \underbrace{[0, \pi]}_{\mathrm{A}}$$

il dominio parametico



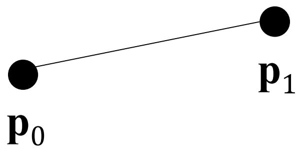
13

Esempio giocattolo:

- ✓ Un segmento come "curva" parametrica
  - ⇒(in questo caso, non è «curva», cioè non ha curvatura)
  - ⇒Il segmento fra due punti $\mathbf{p}_0$, $\mathbf{p}_1$ è il luogo di punti raggiunti dalla funzione

$$f(t) = \mathbf{p}_0 \cdot (1 - t) + \mathbf{p}_1 \cdot t$$

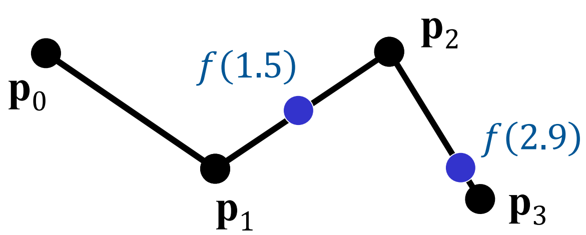
$$= \mathbf{p}_0 + (\mathbf{p}_1 - \mathbf{p}_0) \cdot t$$



14

Esempio: una linea spezzata come una "curva" parametrica

- ✓ La linea spezzata è una concatenazione di segmenti
  - ⇒ segmento = curva paramnetrica con f polinomiale di grado 1 (in t)
- ✓ Cioè è una curva «lineare a tratti»
  - ⇒ f è lineare "su ogni tratto"
- ✓ Esempio con tre tratti:



Dominio parametrico $A = [0, 3]$

$$f(t) = \begin{cases} \mathbf{p}_0 + (\mathbf{p}_1 - \mathbf{p}_0)(t - 0) & se\ \ t \in [0, 1] \\ \mathbf{p}_1 + (\mathbf{p}_2 - \mathbf{p}_1)(t - 1) & se\ \ t \in [1, 2] \\ \mathbf{p}_2 + (\mathbf{p}_3 - \mathbf{p}_2)(t - 2) & se\ \ t \in [2, 3] \end{cases}$$

15

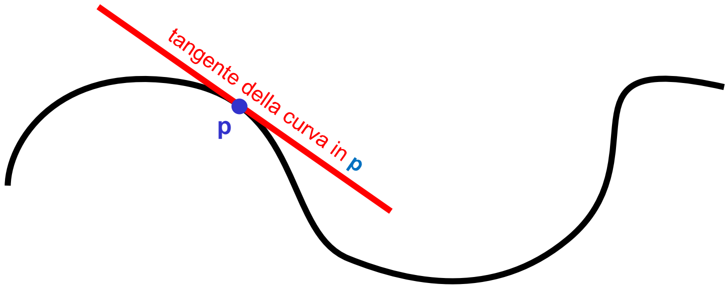
Note sull'esempio giocattolo…

- In questo esempio, ed anche in generale…
  - ⇒ i punti $\mathbf{p}_0$ e $\mathbf{p}_1$ sono costanti nella formula di f
  - ⇒ sono i «**punti di controllo**» della curva: modificandoli, modifico la forma della curva
- in questo esempio… (ma in generale, non sarà sempre così)
  - ⇒ La curva è un polinomio lineare, di grado 1 (in generale, si usano polinomi di grado superiore)
  - ⇒ la curva passa *attraverso* i punti di controllo
  - ⇒ i punti di controllo sono solo 2
  - ⇒ i punti di controllo sono all'inizio e alla fine della curva
  - ⇒ la direzione tangente è costante per ogni *t,* (calcolarla!) cioè la «curva» non è… curva (è dritta, non è incurvata)
- Vedremo esempi di grado superiore

16

Curve paramteriche: quale direzione tangente?

- Data una curva e un punto **p** su di essa, la retta tangete è la retta che è passa per **p** e ha lo stesso orientamento della curva in **p**
- La direzione tangente è la direzione della retta tangente



- Vediamo come calcolare la direzione tangente per un dato punto su di una curva parametrica
  - ⇒ Esercizio: applica poi la regola per trovare la dir tangente negli esempi visti sopra di curve parametriche, e verifica che sia giusta

17

Curve paramteriche: quale direzione tangente?

- ✓ Dato un parametro t , il punto $f(t)$ è sulla curva (per costruzione).
- ✓ Quale vettore è tangente della curva in quel punto?
- ✓ Dobbiamo chiederci di quanto si sposta il punto $f(t)$ quando t incrementa di un piccolo delta ε
- ✓ Risposta:
  - ⇒ si sposta nel punto $f(t+\varepsilon)$
  - ⇒ cioè si sposta del vettore $f(t+\varepsilon) - f(t)$
  - ⇒ dividendo per ε, ottengo lo spostamento (ancora un vettore) per *unità di incremento* della variabile parametrica t

$$\frac{f(t+\varepsilon) - f(t)}{\varepsilon}$$

  - ⇒ il limite con $\varepsilon \to 0$ è il vettore tangente che cerco
  - ⇒ cioè la derivata f' di f calcolata in t : $f'(t)$
  - ⇒ Se normalizzo, ottengo la direzione (vettore unitario)

$$\frac{f'(t)}{\|f'(t)\|}$$ = direzione tangente della curva nel punto $f(t)$

18

Spline

- ✓ E' una curva polinomiale a tratti
  - ⇒ Di un certo grado *n*
- ✓ Una spline è controllata attraverso un insieme **punti di controllo**
  - ⇒ Si dice "approssimante" se ci passa "vicino" I punti di controllo attirano a sè la curva
  - ⇒ Si dice "interplante se ci passa attaverso La curva "interpola" i punti di controllo
- ✓ Una spline è divisa in **archi**.
- ✓ Ogni punto su ogni arco sarà una certa interpolazione lineare dei punti di controllo
  - ⇒ i pesi sono un **polinomio** P(t), di grado *n* >1
  - ⇒ *n* è il grado della spline (che quindi può essere quadratica, cubica, etc)
- ✓ Vediamo ora un esempio importante: le curve di Bézier

Nell'esempio giocattolo della linea spezzata, n = 1, ma normalmente, n>1

nota: non si tratta di una interpolazione *lineare* come quelle abbiamo visto

21

Lo zoo delle curve parametriche

- ✓ Sono stati proposti diverse funzione, come:
  - ⇒Hermite Splines
  - ⇒Bézier splines ← vediamo queste
  - ⇒B-splines
  - ⇒NURBS (polinomi razionali)
- ✓ Differiscono in:
  - ⇒La formula che definisce f
  - ⇒Se la curva è interpolativa o approssimativa
  - ⇒Se la curva è una spline, cioè se è una f è formula polinomiale in t
  - ⇒Il grado di continuità raggiungibile alle giunture fra due curve

22

Curve di Bézier: note 1/2

- ✓ Sono una famiglia di splines di grado *n* qualsiasi
  - ⇒La linea spezzata vistà è una curva di Bézier di grado 1,
  - ⇒Vediamo ora come si generalizza
- ✓ Alcune caratteristiche: ← Verificale per il grado 1
  - ⇒Una curva di Beziér è composta da archi di Beziér (giunti alle estermità)
  - ⇒Un arco di Beziér di grado *n* è controllato da *n*+1 punti di controllo
  - ⇒L'arco è interpolante (passa attraverso) il primo e l'ultimo di questi punti, ma in generale non gli altri (la curva è solo approssimante per loro)
  - ⇒Quindi, per rendere la curva continua («disegnabile senza staccare la penna dal foglio») basta far coincidere l'ultimo punto di controllo di un arco col primo dell'arco successivo

23

Curve di Bézier: note 2/2

- ✓ Le curve di Beziér cubiche (n=3) sono le più usate
  - ⇒Vedremo perché
- ✓ Ci sono due modi equivalenti di definire un arco di curva di Beziér (di grado n):
  - ⇒Formulazione matematica originale, i cui pesi dei punti di controllo sono un ceto polinomio di t (anni '50, Pierre Beziér)
  - ⇒Formulazione «grafica»: algoritmo di DeCasteljau
  - ⇒(vedremo prima la seconda, e poi la riscriviamo come la prima)
- ✓ Cenni storici:
  - ⇒le curve di Beziér sono nate per progettare le curve delle fusoliere delle automobili.

24

Formulaz. di De Casteljau: esempio per grado 2

- ✓ Ho tre «control point» $\mathbf{p}_0, \mathbf{p}_1$, $\mathbf{p}_2$
- ✓ Data la coordinata parametrica $t \in [0..1]$,trovo :
  - ⇒il punto $\mathbf{q}_0$ interpolando fra $\mathbf{p}_0$ e $\mathbf{p}_1$ (con t)
  - ⇒il punto $\mathbf{q}_1$ interpolando fra $\mathbf{p}_1$ e $\mathbf{p}_2$ (con t)
- ✓ Infine
  - ⇒ottengo il punto finale $f\ (\ t\ )$ interpolando fra $\mathbf{q}_0$ e $\mathbf{q}_0$ (di nuovo con t)

(Esercizio: seguire le istruzioni su un disegno)

Demo: http://www.malinc.se/m/DeCasteljauAndBezier.php

25

Formulaz. di De Casteljau: esempio per grado 3

- ✓ 4 «control point» $\mathbf{p}_0$, $\mathbf{p}_1$, $\mathbf{p}_2$, $\mathbf{p}_3$
- ✓ data una posizione parametrica t ,trovo:
  - ⇒il punto $\mathbf{q}_0$ interpolando fra $\mathbf{p}_0$ e $\mathbf{p}_1$ (con t)
  - ⇒il punto $\mathbf{q}_1$ interpolando fra $\mathbf{p}_1$ e $\mathbf{p}_2$ (con t)
  - ⇒il punto $\mathbf{q}_2$ interpolando fra $\mathbf{p}_2$ e $\mathbf{p}_3$ (con t)
- ✓ poi
  - ⇒il punto $\mathbf{r}_0$ interpolando fra $\mathbf{q}_0$ e $\mathbf{q}_1$ (con t)
  - ⇒il punto $\mathbf{r}_1$ interpolando fra $\mathbf{q}_1$ e $\mathbf{q}_2$ (con t)
- ✓ e infine
  - ⇒il punto finale $f\ (\ t\ )$ interpolando fra $\mathbf{r}_0$ e $\mathbf{r}_1$ (con t)

(Esercizio: seguire le istruzioni su di un disegno)

26

Curva di Bezier di grado 3 in forma di codice

L'algoritmo di De Casteljau ci fornisce un modo per codificare la funzione f in modo semplice:

```
vec3 bezier( float t, // posiz. paramet.
             vec3 p0, vec3 p1,
             vec3 p2, vec3 p3)
{
   vec3 q0 = mix(p0,p1, t);   // cioè
                              // p0*(1-t)+p1*t
   vec3 q1 = mix(p1,p2, t);
   vec3 q2 = mix(p2,p3, t);
   vec3 r0 = mix(q0,q1, t);
   vec3 r1 = mix(q1,q2, t);
   return mix( r0, r1, t);
}
```

27

Formulazione equivalente di Bèzier (grado 2)

- ✓ Per De Casteljau: $f(t) = (1-t)\mathbf{q}_0 + t\,\mathbf{q}_1$

  con $\mathbf{q}_0 = (1-t)\mathbf{p}_0 + t\,\mathbf{p}_1$

  e $\mathbf{q}_1 = (1-t)\,\mathbf{p}_1 + t\,\mathbf{p}_2$
- ✓ Sostituendo, otteniamo questa riscrittura:

  $$f(t) = (1-t)^2\mathbf{p}_0 + 2\,(1-t)\,t\,\mathbf{p}_1 + t^2\mathbf{p}_2$$

  - ⇒ che è di grado 2 (t compare al quadrato: t^2)
- ✓ Lo riscrivo, usando $\bar{t} = 1-t$, come:

  $$f(t) = \bar{t}^2\mathbf{p}_0 + 2\,\bar{t}\,t\,\mathbf{p}_1 + t^2\mathbf{p}_2$$

  - ⇒ dove $\bar{t} = 1-t$ ($\bar{t}$ è il complemento a 1 di t)
  - ⇒ cioè $\bar{t} + t = 1$

28

Formulazione di Bèzier (grado generico *n*)

- ✓ Trucco per costruire (e ricordare) la formula di Bezier di qualsiasi grado n
  - ⇒ Step 1: scomporre l'unità in t e $\bar{t}$: $\bar{t} + t = 1$
  - ⇒ Step 2: elevare alla n entrambi i lati $(\bar{t} + t)^n = 1^n = 1$
  - ⇒ Step 3: ottengo una scomposizione dell'unità in $n+1$ termini

    Esempi, per $n = 2,3,4$:

    $(\bar{t}+t)^2 = \bar{t}^2 + 2\,\bar{t}\,t + t^2 = 1$

    $(\bar{t}+t)^3 = \bar{t}^3 + 3\,\bar{t}^2 t + 3\,\bar{t}\,t^2 + t^3 = 1$

    $(\bar{t}+t)^4 = \bar{t}^4 + 4\,\bar{t}^3 t + 6\,\bar{t}^2 t^2 + 3\,\bar{t}\,t^3 + t^4 = 1$
  - ⇒ Step 4: questi termini sono i pesi degli $n+1$ control points
- ✓ Esempi:

  Verificare anche per il grado 1

  - ⇒ Grado 2: $f(t) = \bar{t}^2\mathbf{p}_0 + 2\,\bar{t}\,t\,\mathbf{p}_1 + t^2\,\mathbf{p}_2$
  - ⇒ Grado 3: $f(t) = \bar{t}^3\mathbf{p}_0 + 3\,\bar{t}^2 t\,\mathbf{p}_1 + 3\,\bar{t}\,t^2\,\mathbf{p}_2 + t^3\mathbf{p}_3$
  - ⇒ Grado 4: $f(t) = \bar{t}^4\mathbf{p}_0 + 4\,\bar{t}^3 t\,\mathbf{p}_1 + 6\,\bar{t}^2 t^2\mathbf{p}_2 + 3\,\bar{t}\,t^2 + t^4\,\mathbf{p}_4$

29

Curve Bézier cubiche: codice ottimizzato

```
vec3 bezier( float t,
             vec3 p0, vec3 p1,
             vec3 p2, vec3 p3)
{
   float k = 1.0-t;
   return   (k*k*k)*p0 +
        (3.0*k*k*t)*p1 +
        (3.0*k*t*t)*p2 +
            (t*t*t)*p3 ;
}
```

30

Gli endpoint degli archi di Bèzier

- ✓ Gli endponits di arco di Bèzier coincidono con il primo e l'ultimo punto di controllo
  - ⇒E' banale da verificare usando le formule sopra!
  - ⇒Gli endpoints sono con $t = 0$, $\bar{t} = 1$ e con $t = 1$, $\bar{t} = 0$
- ✓ Come sono le direz. tangenti nei due endpoints?
  - ⇒Quanto vale la derivata f' nei punti parametrici $t = 0$ e $t = 1$
- ✓ La risposta (calcolando le derivate) è :
  - ⇒all'inizio dell'arco, la tangente è orientata come il vettore che connette il 1mo pt. di controllo al 2do
  - ⇒alla fine dell'arco, la tangente è orientata come il vettore che connette il penultimo pt. di controllo all'ultimo
- ✓ Vale per tutti i gradi (verificare per i gradi 1 e 2)

31

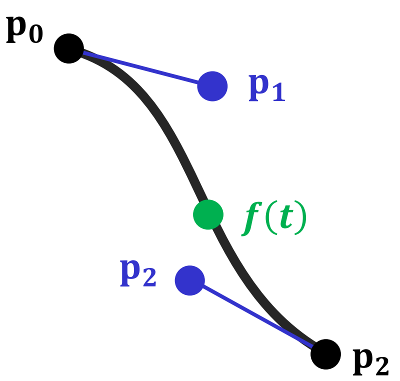
Curve di Bézier cubiche

- ✓ Il grado 3 (curve di Bézier cubiche) rappresenta il grado più conveniente da usare
- ✓ Ho quattro punti *distinti* che controllano la curva in modo intuitivo:
  - ⇒ Posizione e orientamento all'inizio della curva (i primi due)
  - ⇒ Posizione e orientamento alla fine della curva (gli ultimi due)
  - ⇒ Posso ottenere curve di Bézier con continuità G1 (e C1)
- ✓ Per paragone:
  - ⇒ I gradi > 3 non sono altrettanto utili e più difficili da manipolare, (cosa controlla il punto intermedio)?
  - ⇒ Coi gradi <3, non posso manipolare le due direzioni tangenti in modo indipendente una dall'altra
- ✓ Le curve cubiche sono ideali per fondere gli archi in una sola spline, detta «Bezièr curve» (o Bezièr path)
  - ⇒ Posso far coincidere le direzioni tangenti per ottenere una curva smooth

33

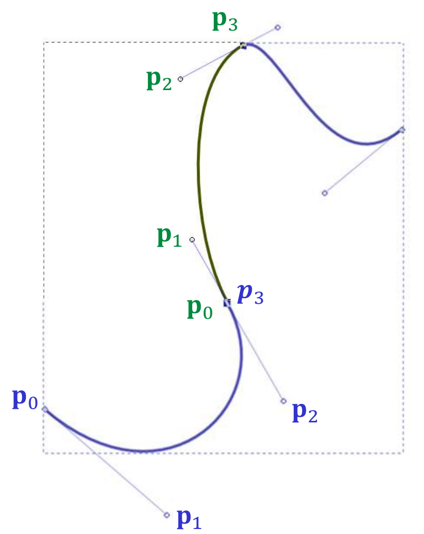
Bézier cubiche : recap

$$
\begin{aligned}
\boldsymbol{f}(\boldsymbol{t}) \quad = \quad & (1-t)^3 \ \mathbf{p_0} \\
+\ 3\,t \quad & (1-t)^2 \ \mathbf{p_1} \\
+\ 3\,t^2 \ & (1-t) \ \mathbf{p_2} \\
+\ \ t^3 \quad & \qquad\quad \mathbf{p_3}
\end{aligned}
$$



34

Concatenare archi Bezier arch: *Bezier curve (o path)*



Se end-points coincidono ($\mathbf{p}_3 = \mathbf{p}_0$): curva continua C0

Se, inoltre ($\mathbf{p}_2$, $\mathbf{p}_3 = \mathbf{p}_0$, $\mathbf{p}_1$) sono allineati: curva continua con direz di tangente continua, cioè C1 (curva "smooth"- "liscia")

35

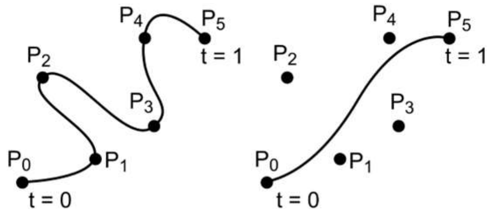
Curve di Bezier

- ✓ Usati per:
  - ⇒ design 2D (molte applicazioni)
  - ⇒ Formato SVG (per immagini vettoriali 2D) (è anche un formato standard del Web!)
  - ⇒ specifica della forma delle lettere in un font
  - ⇒ Ideale per path di animazione: basta specificare posizione e velocità in una serie di punti sul percorso!
- ✓ Programma Open Source per sperimentare:
  - ⇒ Inkscape (http://inkscape.org)
  - ⇒ Test: disegnare una curva (chiamata path in Inkskape), salvare il progetto in formato SVG, e analizzare il file risultante come file di testo

36

Curve paramteriche con punti di controllo

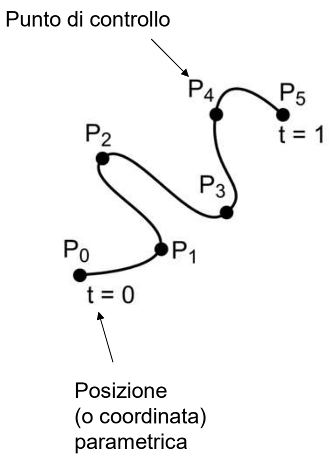
- La curve di Bèzier è solo un'esempio di schema
- In generale, uno schema consiste nel definire N punti di controllo e definire una curva che passa da questi punti (schema «interpolativo») oppure ci si avvicina (schema «approssimativo»)

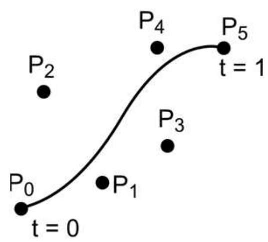


37

Curve paramteriche (terminologia)

- Schema interpolativo
- Schema approssimativo

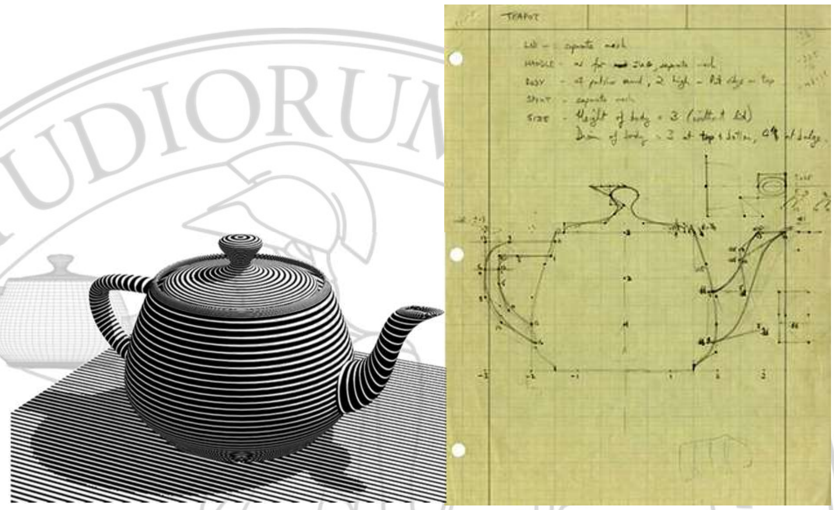




38

Marco Tarini - Computer Graphics 2022/2023
Università degli Studi di Milano

Parametric Surfaces



39

Superfici parametriche

- ✓ Siamo ora pronti per estendere le curve parametriche nelle superfici parametriche

$$f : \mathrm{A} \rightarrow \mathrm{B}$$

dominio parametrico

immagine di f

$\mathrm{A} \subseteq \mathbb{R}$ $\mathrm{B} = \mathbb{R}^2$	$\mathrm{A} \subseteq \mathbb{R}$ $\mathrm{B} = \mathbb{R}^3$	$\mathrm{A} \subseteq \mathbb{R}^2$ $\mathrm{B} = \mathbb{R}^3$
B è una curva parametrica nel piano	B è una curva parametrica nello spazio	B è una **superficie** parametrica nello spazio

40

Superficie Parametrica

$f : \mathrm{A} \rightarrow \mathbb{R}^3$

$\mathrm{A} \subseteq \mathbb{R}^2$ dominio parametrico

$\mathrm{B} \subseteq \mathbb{R}^3$ immagine di f

Superficie Parametrica:
immagine di una funzione da un dominio in R^2 a R^3

per definirne una, scegliere una funzione (e il suo dominio A) (il "dominio parametrico")

$$f\begin{pmatrix} s \\ t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

" x,y,z sono calcolate come formule di s,t "

41

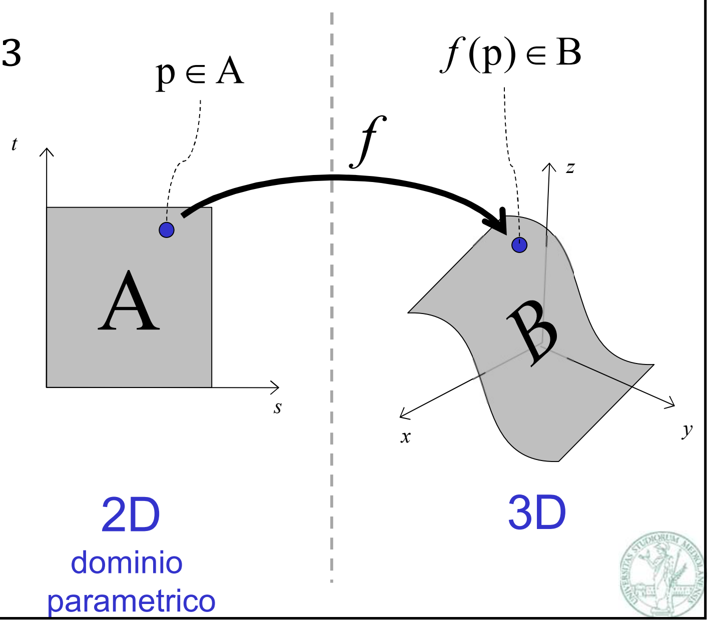
Superficie Parametrica

$f : \mathrm{A} \rightarrow \mathbb{R}^3$

$\mathrm{A} \subseteq \mathbb{R}^2$

$\mathrm{B} \subseteq \mathbb{R}^3$

$$f\begin{pmatrix} s \\ t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$



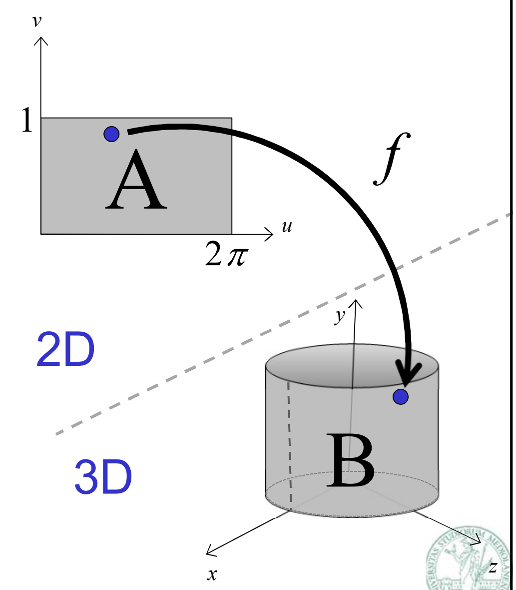
42

Esempio di sup param: area laterale del cilindro

$$f : \mathrm{A} \rightarrow \mathrm{B}$$

$$\mathrm{A} = [0, 2\pi] \times [0, 1]$$

$$f\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r \cdot \cos(u) \\ h \cdot v \\ r \cdot \sin(u) \end{pmatrix}$$



43

Sup. parametriche: convenzioni e terminologia

- ✓ A = Dominio Parametrico = il dominio di f
  - ⇒Definito come regione di uno spazio bimensionale
  - ⇒Spesso, per convenzione,
    definito come il quadrato [0..1]x[0..1]
  - ⇒Per distinguere le sue coordinate da quelle usate come spazio oggetto (*x*,*y*,*z*), le chiamiamo *s*, *t* (a volte, *u* e *v*)
  - ⇒Come per le coordinate delle tessiture
- ✓ B = immagine di f
  - ⇒Il luogo di punti raggiungibili da f a partire da A
  - ⇒Costituisce la superficie parametrica

44

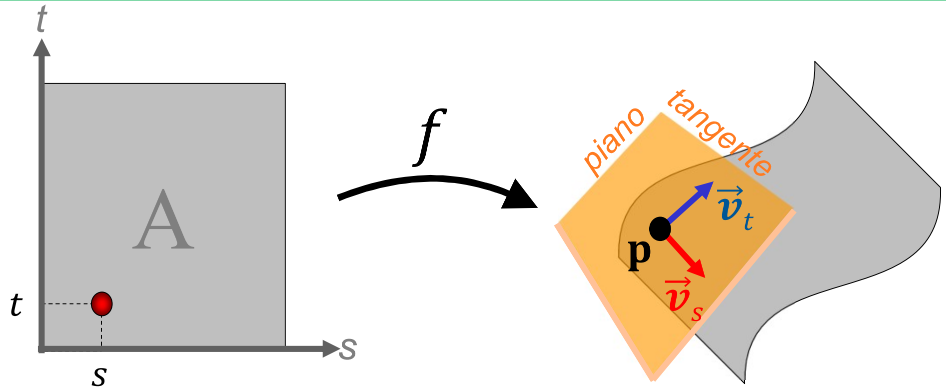
Normale di una superfice parametrica

$$f\begin{pmatrix} s \\ t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

- ✓ «Muovendomi» in direzione s e t sul dominio parametrico A, mi sposto sulla superficie B
- ✓ Posso derivare f sia rispetto a s, sia rispetto a t
  - ⇒Derivate “parziali” di f , $\partial f \,/\, \partial s$ e $\partial f \,/\, \partial t$
  - ⇒Sono gli spostamenti in 3D che effettuo incrementando s o t
- ✓ Ottenengo due vettori tangenti alla superficie
  - ⇒Quindi due vettori sul piano tangente alla superficie
- ✓ La normale della superficie in un punto è data dal prodotto cross fra questi due vettori! (rinormalizzato)

45

Normale di una superfice parametrica



$$\mathbf{p} = f\begin{pmatrix} s \\ t \end{pmatrix}$$

$$\vec{v}_s = \partial f \,/\, \partial s \begin{pmatrix} s \\ t \end{pmatrix}$$

$$\vec{v}_t = \partial f \,/\, \partial t \begin{pmatrix} s \\ t \end{pmatrix}$$

normale in $\mathbf{p}$:

$$\frac{\vec{v}_s \times \vec{v}_t}{\|\vec{v}_s \times \vec{v}_t\|}$$

46

Superficie parametriche e punti di controllo

- ✓ Come nel caso delle spline, una classe utile di superfici parametriche è costituita come segue:
  - ⇒ $f\begin{pmatrix}s\\t\end{pmatrix}$ è una interpolazione lineari di un certo numero di punti 3D detti «di controllo»
  - ⇒ i pesi dell'interpolaz sono dati da polinomi (questa volta, in s e t), secondo una formula predeterminata
  - ⇒ memorizzare la superficie = memorizzare i punti di controllo
- ✓ Posso usare lo schema di una qualsiasi spline per costruire il corrispondente «patch» (una superf.)
  - ⇒ Quindi esistono: patch di Beziér, patch NURBS, …
- ✓ Idea intuitiva: la superficie è un tessuto di linee parametriche
  - ⇒ come la trama e l'ordito in un tessuto

47

Bezier patches di grado N

- ✓ Ho una griglia di (N+1)×(N+1) pts di controllo…
  - ⇒ Es: con N = 2 ho:

$$\begin{matrix} p_{0,0} & p_{1,0} & p_{2,0} \\ p_{0,1} & p_{1,1} & p_{2,1} \\ p_{0,2} & p_{1,2} & p_{2,2} \end{matrix}$$

- ✓ Con N = 2, algoritmo per trovare $p = f(s,t)$
  - ⇒ cioè la pos 3D del punto di coord parametriche (s, t)
- ✓ procedo così:
  - ⇒ trovo a come $f(t)$ sulla bezier curve $p_{0,0}$ $p_{1,0}$ $p_{2,0}$
  - ⇒ trovo b come $f(t)$ sulla bezier curve $p_{0,1}$ $p_{1,1}$ $p_{2,1}$
  - ⇒ trovo c come $f(t)$ sulla bezier curve $p_{0,2}$ $p_{1,2}$ $p_{2,2}$
  - ⇒ trovo p come $f(s)$ sulla bezier curve a,b,c

48

Bezier patches grado 3 «Bi-cubic Bézier patches»

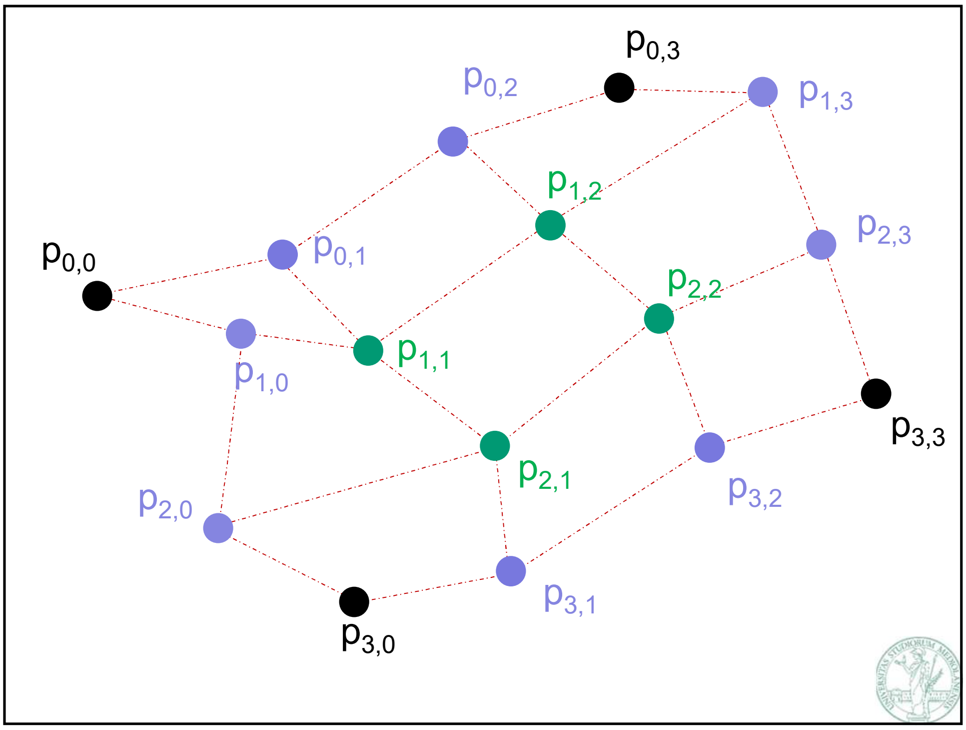
- ✓ Algoritmo per trovare p $= f(s,t)$:
  - ⇒trovo a come $f(t)$ sulla bezier curve $p_{0,0}$ $p_{1,0}$ $p_{2,0}$ $p_{3,0}$
  - ⇒trovo b come $f(t)$ sulla bezier curve $p_{0,1}$ $p_{1,1}$ $p_{2,1}$ $p_{3,1}$
  - ⇒trovo c come $f(t)$ sulla bezier curve $p_{0,2}$ $p_{1,2}$ $p_{2,2}$ $p_{3,2}$
  - ⇒trovo d come $f(t)$ sulla bezier curve $p_{0,3}$ $p_{1,3}$ $p_{2,3}$ $p_{3,3}$
  - ⇒trovo p come $f(s)$ sulla bezier curve a,b,c,d
- ✓ Oppure, equivalentemente :
  - ⇒trovo a come $f(s)$ sulla bezier curve $p_{0,0}$ $p_{0,1}$ $p_{0,2}$ $p_{0,3}$
  - ⇒trovo b come $f(s)$ sulla bezier curve $p_{1,0}$ $p_{1,1}$ $p_{1,2}$ $p_{1,3}$
  - ⇒trovo c come $f(s)$ sulla bezier curve $p_{2,0}$ $p_{2,1}$ $p_{2,2}$ $p_{2,3}$
  - ⇒trovo d come $f(s)$ sulla bezier curve $p_{3,0}$ $p_{3,1}$ $p_{3,2}$ $p_{3,3}$
  - ⇒trovo p come $f(t)$ sulla bezier curve a,b,c,d

49

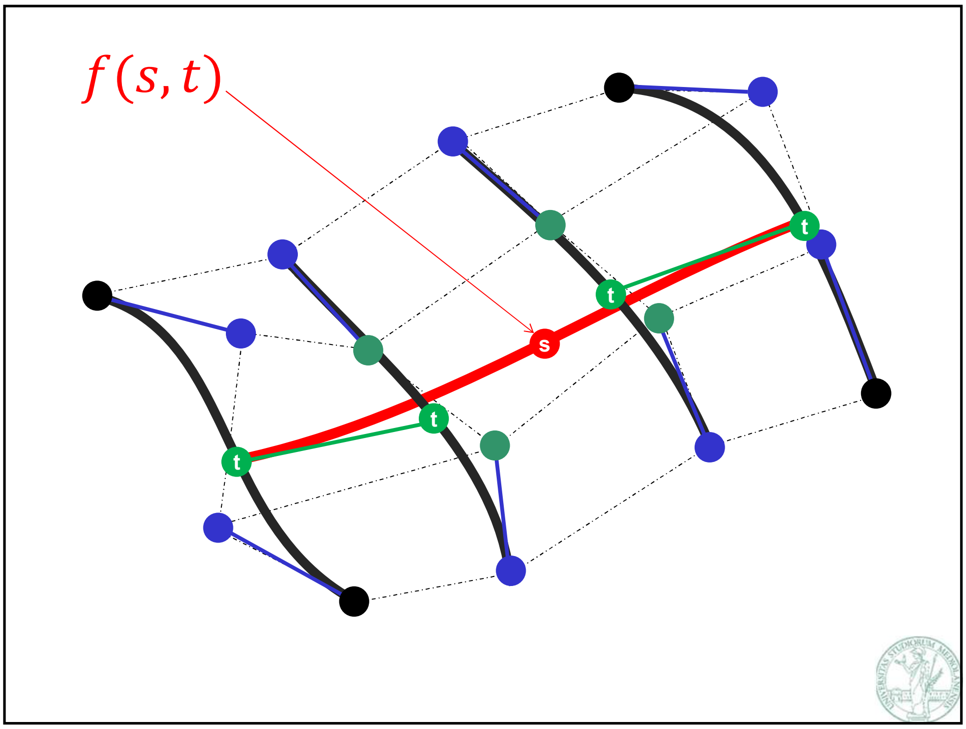
Bezier patches grado 3 «Bi-cubic Bézier patches»

- ✓ N = 3
- ✓ Griglia di 4x4 vertici di controllo
  - ⇒ $p_{0,0}$ $p_{1,0}$ $p_{2,0}$ $p_{3,0}$
    $p_{0,1}$ $p_{1,1}$ $p_{2,1}$ $p_{3,1}$
    $p_{0,2}$ $p_{1,2}$ $p_{2,2}$ $p_{3,2}$
    $p_{0,3}$ $p_{1,3}$ $p_{2,3}$ $p_{3,3}$
- ✓ Passa per i 4 angoli (è interpolante su loro)
  p0,0 p0,3 p3,0 p3,3
- ✓ E' approssimante sugli altri punti
- ✓ E detto anche «Bi-Cubico» perché è cubico sia sulla s, che sulla t

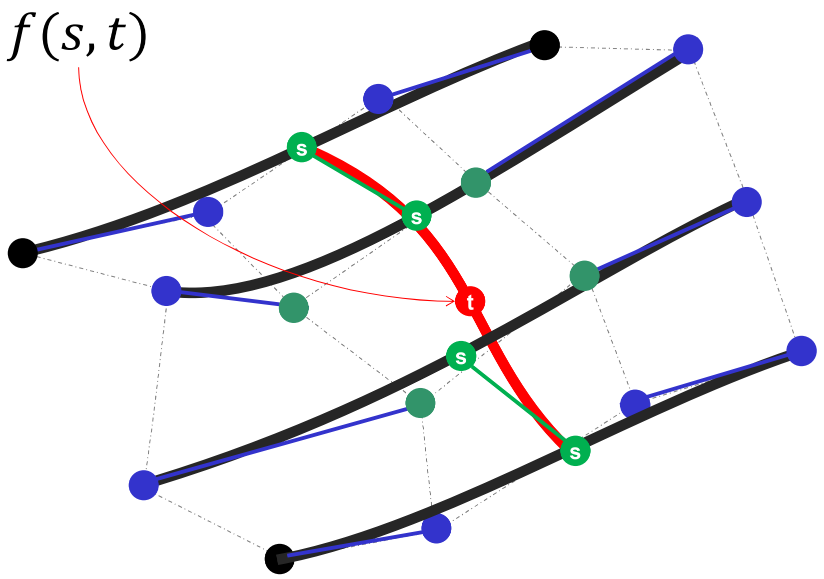
50


$p_{0,3}$
$p_{0,2}$
$p_{1,3}$
$p_{1,2}$
$p_{2,3}$
$p_{0,0}$
$p_{0,1}$
$p_{2,2}$
$p_{1,1}$
$p_{1,0}$
$p_{3,3}$
$p_{2,1}$
$p_{2,0}$
$p_{3,2}$
$p_{3,1}$
$p_{3,0}$

51

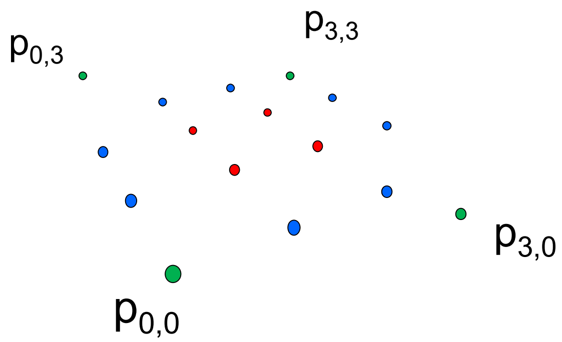

$f(s,t)$
t
t
t
t
s

52



53

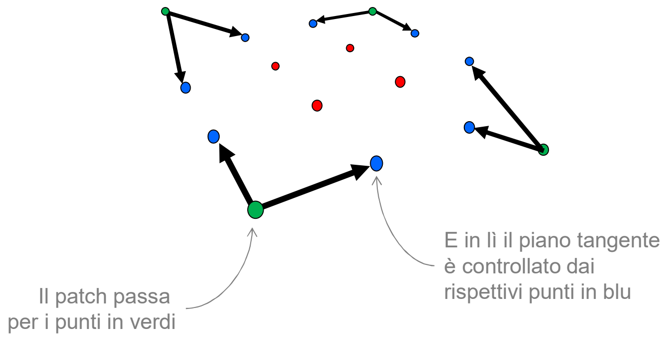
Bi-cubic Bézier patches: esempio



4x4 punti di controllo

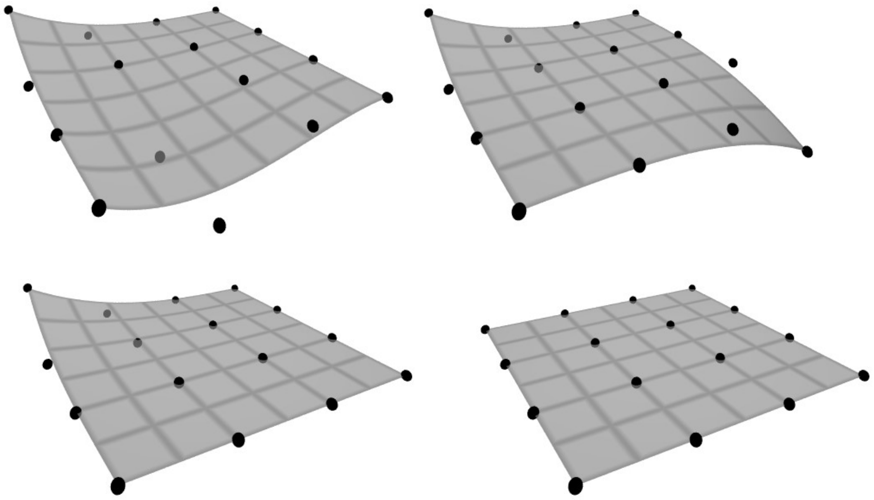
55

Bi-cubic Bézier patches



56

Cubic Bézier patches: esempi



Modificando I punti di controllo, modifico il patch

http://kovacsv.github.io/JSModeler/documentation/examples/bezier.html

58

Superifici di bezier

- ✓ Così come una curva (o un path) di Bézier è costituito da molti archi connessi, una superficie di Bézier è costituita da molti patch connessi sui loro lati
  - ⇒ Nuovamente, il matching dei punti di controllo sul bordo garantisce che la superficie sia continua, senza gaps
  - ⇒ Inoltre, imporre la colinearità fra i punti di controllo interni garantisce che la superficie non abbia crease (discontinuità di normale), cioè che sia smooth (lisca) – se questo è desiderato!

59

Lo zoo delle superfici parametriche

- ✓ Anche gli altri tipi di splines sono estendibili a patch, nello stesso modo:
  - ⇒ Hermite Splines
  - ⇒ Bezier splines
  - ⇒ B-splines
  - ⇒ NURBS
- ✓ Le NURBS in particolare sono molto utilizzate

60

Superifici parametriche: benefici

- ✓ Controllabili, intuitive da modellare, ottime per il design
  - ⇒ Queste superfici so ideali per il design
  - ⇒ Soprattutto di tipo industriale / artificiale (CAID – Computer-aided industrial design)
  - ⇒ Controllo di curvatura e normale
- ✓ E' una rappresentazione compatta ed espressiva
  - ⇒ Basta memorizzare pochi pts di controllo
  - ⇒ Rappresentazione matematica di superfici dalla geometria *realmente* curva
  - ⇒ Paragona: mesh: lineari a tratti (curvatura solo simulata con normali o normal map)
- ✓ Risoluzione: numero di patch che compone la sup
  - ⇒ equivalentemente a meno di fattore, del num. di pt. controllo
  - ⇒ E' una res adattiva!

61

Superifici parametriche : benefici

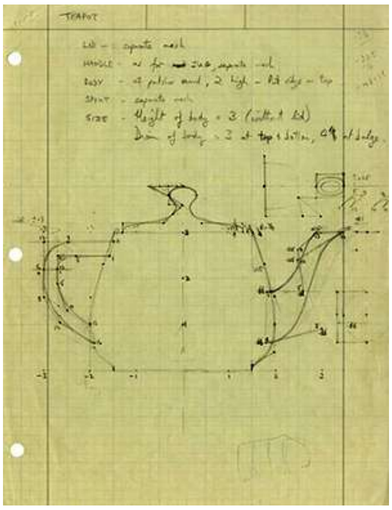
- ✓ La superficie «nasce» già con un dominio parametrico e un uv-mapping incluso nella sua definizione
  - ⇒ per es, è triviale applicare il texture mapping ad un patch
  - ⇒ paragona col caso Mesh: parametrizzazione difficile
- ✓ Sono intuitive da manipolare per il designer del modello
  - ⇒ Esempio: la teiera dello Utha, Il famoso modello 3D, simbolo della Computer Graphic, è stato costruito (anni '70) come superficie di Bézier completamente «a mano», scrivendo i punti di controllo con carta e penna su un foglio (guardando una teiera fisica)
  - ⇒ Oggi, moltissime suite di modellazione 3D sono basate o includono superfici parametriche (NURBS, di Bézier, e/o altro)
  - ⇒ Es: Rhinoceros3d, Autodesk Alias, Aka «Alias StudioTools» moi3D, Blender, Solidworks

Rhinoceros

tool specializzati

62

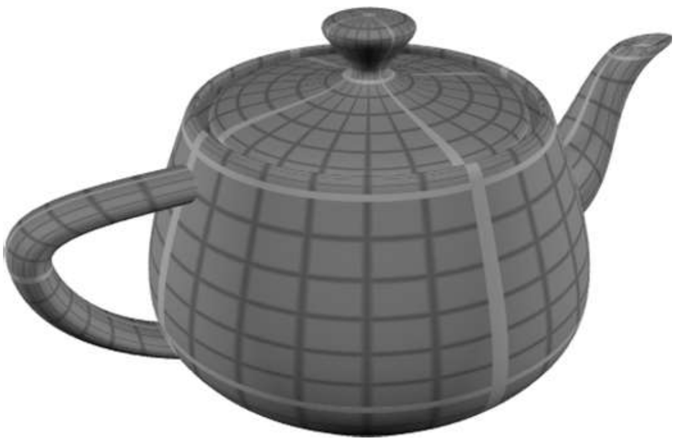
Bézier patches: per il design



The Utah Teapot, by Martin Newell (1975)

63

Bézier patches: utili per il desing



The Utah Teapot, by Martin Newell (1975)

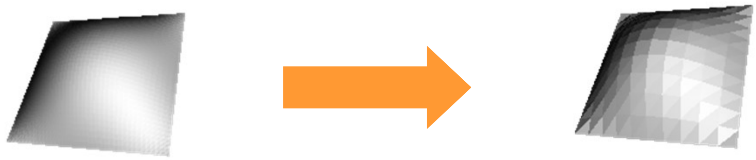
64

Processing su una superficie parametrica

- ✓ In molti contesti, la superficie parametrica è l'input o l'output diretto di task di geometry processing, incluso:
  - ⇒ Semplificazione: riduzione del numero di patch
  - ⇒ Costruzione automatica (a partire da un'altra rappresentazione, quale una mesh). Task difficile.
- ✓ Per molti usi, compreso (spesso) il rendering, è necessario, viceversa convertire la superficie parametrica in una mesh poligonale
  - ⇒ Fortunatamente, questo procedimento è semplice
  - ⇒ Nota: può essere fatto «on demand», per es solo in fase di rendering, usando la rappresentazione originale (assai più compatta) per lo storing del modello 3D e qualsiasi altro uno

65

Da superficie parametrica a mesh



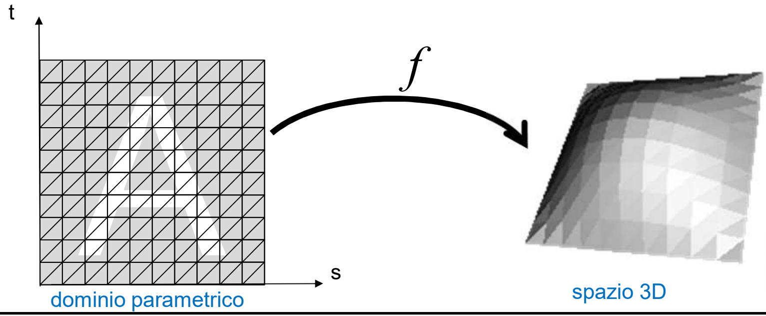
una superficie curva parametrica?

Mesh poligonale Poligoni

66

Da superficie parametrica a mesh poligonale

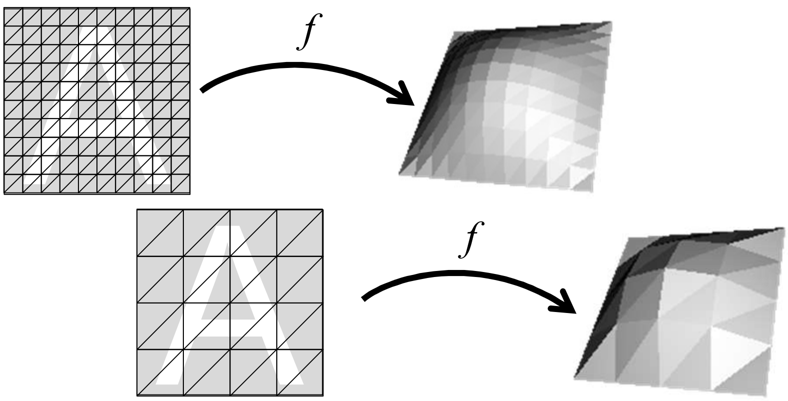
- ✓ Banale: campiono il dominio parametrico A su una griglia regolare (es.: 10x10)
  - ⇒ (s,t) = (0.0,0.0), (0.1,0.0), … (0.0,0.1), (0.1,0.1)… , (1.0, 1.0)
- ✓ Per ogni posizione campionata (s,t)
  - ⇒ creo un vertice della mesh nel punto $f(s,t)$
  - ⇒ doto ogni vertice della sua normale, ottenuta con le derivate di f
- ✓ Creo triangoli che connettono i vertici nel modo banale
- ✓ Risultato: mesh regolare!



67

Da superficie parametrica a mesh

- ✓ Osservazione: quanto densamente tassellare può essere deciso liberamente, anche in fase di rendering
  - ⇒ La superficie rappresentata è curva: solo durante il rendering la approssimiamo con superfici triangolate



68