Marco Tarini - Computer Graphics 2022/2023
Università degli Studi di Milano

Modelli impliciti

78

Una (imperfetta) categorizzazione dei tipi di modelli digitali 3D

		ELEMENTI DISCRETI			CONTINUI
		regolari *«a griglia»*	semi-regolari o irregolari: elementi simpliciali	semi-regolari o irregolari: elementi non simpliciali	
SUPERFICIALI	2-manifold *«rappresenta una vera superficie»*	**Height Field** **Range Scan** **Geometry Images**	**Triangle Mesh**	**Polygonal Mesh** **Quad Mesh** **Quad dominant Mesh**	**Subdivision surfaces** / **Parametric Surfaces (es. B-splines)**
SUPERFICIALI	non-manifold *«non rappresenta una sup»*	**Set di Range Scan**	**Point Cloud**		
VOLUMETRICI	(3-manifold)	**Voxelized Volume** **Volumetric Textures**	**Tetra Mesh**	**Hexa Mesh**	**Implicit models (es. CSG)**

79

Modelli 3D Volumetrici

1. Discreti & regolari: dataset voxellizati
   - ⇒analogo di un immagine rasterizzata, ma in 3D
   - ⇒una griglia di voxel
2. Discreti & irregolari: mesh poliedrali
   - ⇒analogo di una mesh poligonale (ma nel volume)
   - ⇒insieme di poliedri adiacenti faccia a faccia
3. Continui: modelli impliciti
   - ⇒rappresentazione basata su funzioni volumetriche
   - ⇒superficie come luogo di zeri di una funzione

80

Modello implicito

- ✓ Un oggetto definito (implicitamente) da una funzione contina f
  che va da punti dello punti 3D a valori scalari
  (detta funz. generatrice o funz. primitiva)

$$f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$$

- ✓ Il valore di f definisce, per un punto dato $\mathbf{p}$, se è dentro oppure fuori dall'oggetto:
  - ⇒$f(\mathbf{p}) < 0$ <==> $\mathbf{p}$ dentro
  - ⇒$f(\mathbf{p}) > 0$ <==> $\mathbf{p}$ fuori
  - ⇒$f(\mathbf{p}) = 0$ <==> $\mathbf{p}$ sulla superficie

81

Modelli impliciti: semantica del valore scalare

- Un'interpretazione comune:
  Funzione Caratteristica di un insieme, ma fuzzy
  - ⇒ 1 : dentro («questo punto *sicuramente* appartiene all'oggetto»)
  - ⇒ 0 : fuori («questo punto *sicuramente* non appartiene all'oggetto»)
  - ⇒ valori intermedi: situazioni miste / indecise (valore logico «fuzzy»)
  - ⇒ ½ : posizione della superficie
    (il confine fra «più fuori che dentro» e «più dentro che fuori)
- Un'altra interpretazione comune: **Signed Distance Function** (o **Field**)
  «distanza con segno (approssimata) dalla superficie»
  SDF
  - ⇒ Valori negativi : dentro ("distanza negativa" dalla superficie)
  - ⇒ Valori positivi : fuori (distanza positiva dalla superficie)
  - ⇒ Zero : posizione sulla superficie (per costruzione)
  - ⇒ Nota: eccetto dove 0, non deve essere *esattamente* la distanza
- Note:
  - ⇒ Sono equivalenti, è facile convertire questi valori uno nell'altro (come?)
  - ⇒ Il gradiente della funzione è invertito nei due casi
    (1mo caso: gradiente verso il dentro. 2ndo caso: verso il fuori)
  - ⇒ In queste lezioni, assumeremo il secondo caso

82

Superficie implicita

- E' la **superficie** che delimita
  il modello implicito (volumetrico)
- E' dato il **luogo degli zeri** di una funzione f :

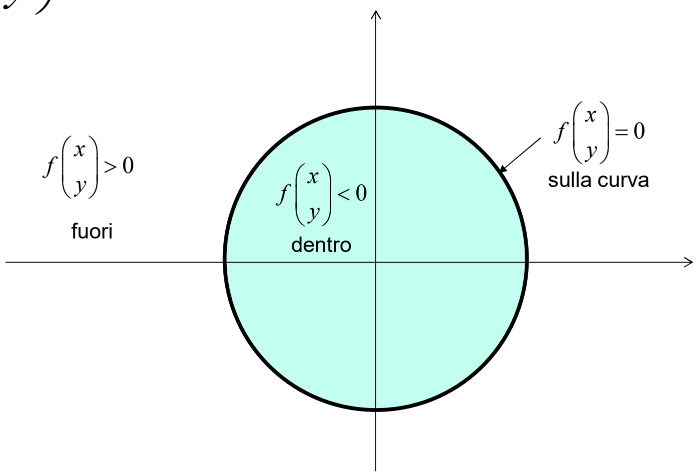
$$f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$$

- cioè l'insieme di tutti i punti 3D $\mathbf{p}$
  tali che $f(\mathbf{p}) = 0$
- la funzione f è un rappresentazione dell'oggetto 3D

83

Esempio ridotto in 2D: un cerchio

$$f\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = x^2 + y^2 - r^2$$



84

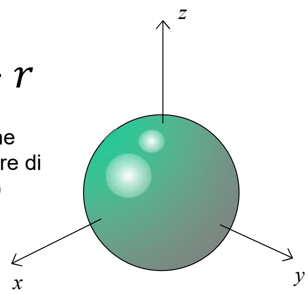
Esempio di modello implicito: una sfera

$$f\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} - r$$

cioè

$$f(\mathbf{p}) = \|\mathbf{p} - \mathbf{0}\| - r$$

Origine (vettore di 0,0,0)



Sfera centrata nell'origine

85

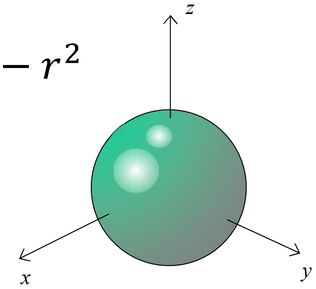
Esempio di modello implicito: una sfera (variante)

$$f\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix} = x^2 + y^2 + z^2 - r^2$$

Funzione diversa, stessa superficie

cioè

$$f(\mathbf{p}) = \|\mathbf{p} - \mathbf{0}\|^2 - r^2$$



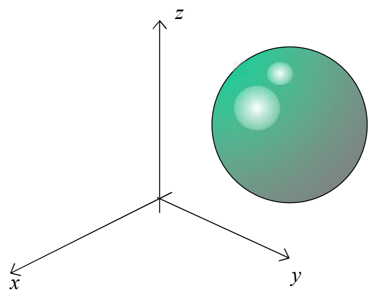
Sfera centrata nell'origine

86

Esempio di modello implicito: una sfera

$$f(\mathbf{p}) = \|\mathbf{p} - \mathbf{c}\|^2 - r^2$$

«Una sfera (il boundary di una palla) è il luogo dei punti $\mathbf{p}$ che distano r dal suo centro $\mathbf{c}$»



Sfera centrata nel punto $\mathbf{c}$

87

Nota terminologica

- Perché la chiamiamo superficie "implicita"?
  - ⇒ perché, a differenza delle altre rappresentazioni che abbiamo visto
    (nuvole di punti, mesh, superfici parametriche…)
    non memorizziamo *esplicitamente* alcun punto sulla superficie
- Superficie implicita VS modello implicito
  - ⇒ spesso (anche in letteratura) "superficie implicita" 3D è usato come sinonimo di "modello implicito" 3D
  - ⇒ a rigor di termini, un modello implicito è di natura *volumetrica*
  - ⇒ descrive non solo una superficie, ma anche se un qualsiasi punto nel volume sia interno o esterno ad essa
  - ⇒ tuttavia, i due termini sono comunemente usati in modo intercambiabile

88

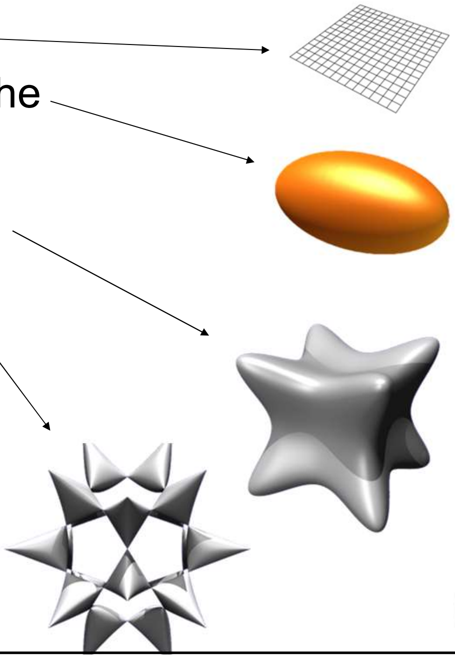
Categorie di modelli impliciti

- Superfici algebriche: $f()$ è un polinomio
- Superfici quadriche : $f()$ è di grado 2
  - ⇒ classe importante!
    - equazioni semplici, ma buon potere esressivo
    - per esempio, sfere perfette (l'esempio sopra)
- Superfici cubiche : $f()$ è di grado 3
- Superfici quartiche : $f()$ è di grado 4
- etc

89

Superfici **algebriche**

- ✓ Grado 1: Lineari
- ✓ Grado 2: Quadratiche
- ✓ Grado 3: Cubiche
- ✓ Grado 4: Quartiche
- ✓ Grado 5: Quintiche
- ✓ Grado 6: Sestiche
- ✓ ...



90

Normali di una superficie implicita

- ✓ Sia $\mathbf{p}$ un punto sulla superficie, cioè $f(\mathbf{p}) = 0$
- ✓ Quanto vale la normale alla superficie in $\mathbf{p}$?
  - ⇒ cioè: quale direzione $\hat{\boldsymbol{n}}$ è ortogonale alla superficie nel punto $\mathbf{p}$
  - ⇒ cioè: in che direzione $\hat{\boldsymbol{n}}$ devo spostarmi da $\mathbf{p}$ per allontanarmi il più possibile dalla superficie
  - ⇒ cioè: in che direzione $\hat{\boldsymbol{n}}$ devo spostarmi da $\mathbf{p}$ per aumentare il più possibile il valore di $f\,(\mathbf{p} + k\,\hat{\boldsymbol{n}})$
- ✓ Risposta: basta (per def) prendere il gradiente di $f(\mathbf{p})$
  - ⇒ gradiente f vettore delle derivate parziali in calcolato in $\mathbf{p}$ (rinormalizzato)

$$\hat{\boldsymbol{n}} = \frac{\nabla f(\mathbf{p})}{\|\nabla f(\mathbf{p})\|}$$

91

Gradiente di una funzione (ripasso)

- Sia $f(\mathbf{p})$ è una funzione da punti a scalari
$$f: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$$
- Quindi da x, y, z ad un valore scalare
- Il suo gradiente $\nabla f(\mathbf{p})$ nel punto $\mathbf{p}$ è definito dal vettore delle sue derivate parziali in x, y, z (calcoalte in $\mathbf{p}$)
$$\nabla f(\mathbf{p}) = \begin{pmatrix} \partial f / \partial x \\ \partial f / \partial y \\ \partial f / \partial z \end{pmatrix}$$
- Ad esempio…

$$f\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = x^2 + y^2 + z^2 - r^2$$

funzione primitiva della sfera

$$\nabla f\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2x \\ 2y \\ 2z \end{pmatrix}$$

←derivata di f in x
←derivata di f in y
←derivata di f in z

gradiente di f, cioè normale della sfera nel punto x, y, z (a meno di normalizzazione)

92

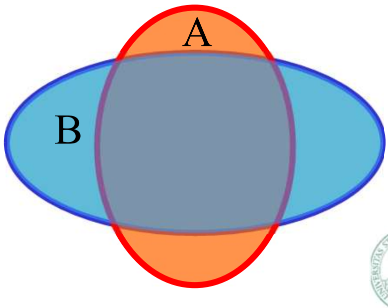
Vantaggi dei modelli impliciti

- E' una rappresentazione volumetrica
  - ⇒per es, facile determinare se un punto $\mathbf{p}$ sia all'interno o all'esterno di un oggetto – basta valutare f su $\mathbf{p}$!
- E' molto compatta
  - ⇒a differenza di quelle discrete!
  - ⇒per es: per memorizzare un polinomio basta memorizzare una manciata di costanti (quante, per un dato grado?)
- Rappresenta superfici curve
  - ⇒Paragona con tri-mesh, che rappresenta superfici lineari a tratti (cioè localmente piatti)
- Buon modello per superfici che variano nel tempo
  - ⇒es quelle dei fluidi
- Consentono potenti operazioni di editing
  - ⇒operazioni volumetriche booleane: vedi sotto

93

Operazioni booleane volumetriche

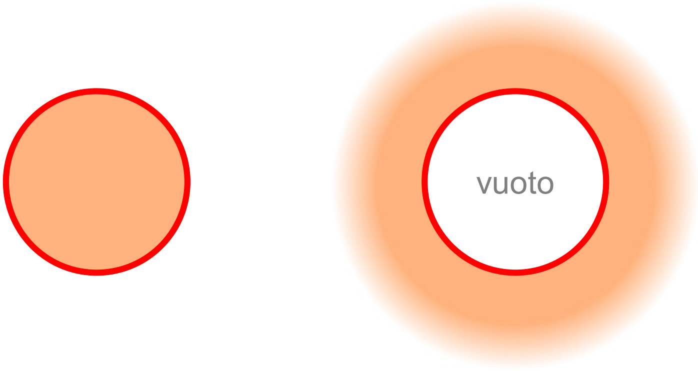
- ✓ Siano A e B modelli impliciti con funzioni primitive f_{A} e f_{B}
- ✓ Posso definire (come modelli impliciti) la funzione primitive della loro…
  - ⇒ inversione: $-f_{\mathrm{A}}$
  - ⇒ intersezione: $\max(f_{\mathrm{A}}, f_{\mathrm{B}})$
  - ⇒ unione: $\min(f_{\mathrm{A}}, f_{\mathrm{B}})$
  - ⇒ scavo di B da A: $\min(f_{\mathrm{A}}, -f_{\mathrm{B}})$
  - ⇒ Scavo di A da B: $\min(-f_{\mathrm{A}}, f_{\mathrm{B}})$



94

Operazioni booleane volumetriche

- ✓ Opposto: dentro diventa fuori e viceversa



f_{A} $\qquad$ $-f_{\mathrm{A}}$

⇒ Posso vedere gli scavi come intersezioni con gli opposti

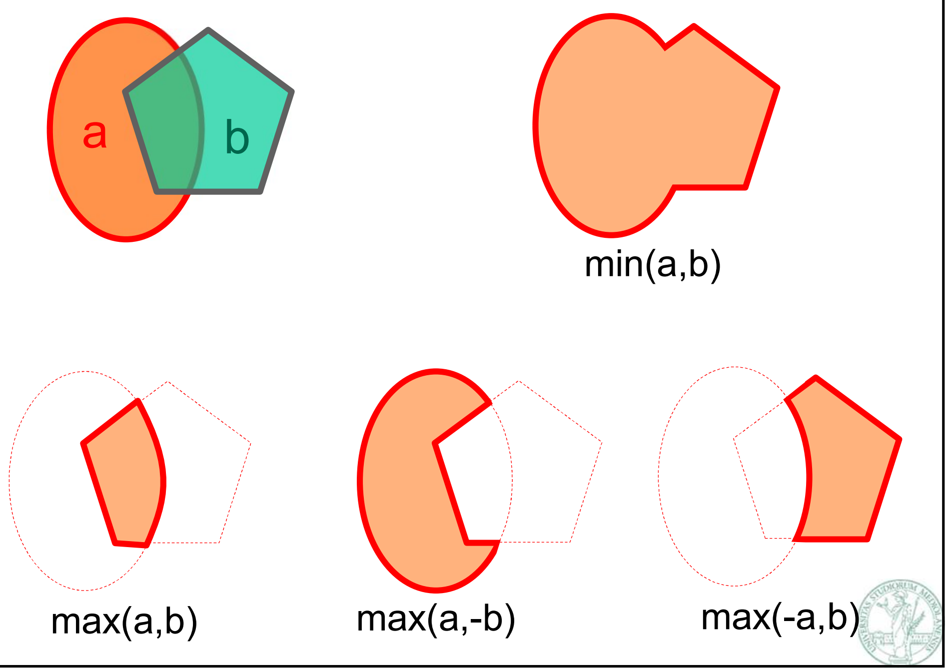
95

Operazioni booleane volumetriche

Operazione volumetrica booleana	**Vista come operazione fra insiemi di punti**	**Vista come operazione booleana**	**Operaz delle due funzioni primitive**
Opposto	$\bar{A}$	$\sim A$	$-f_A$
Intersezione	$A \cap B$	$A \wedge B$	$\max(f_A, f_B)$
Unione	$A \cup B$	$A \vee B$	$\min(f_A, f_B)$
Scavo di B da A	$A \cap \bar{B}$	$A \wedge \sim B$	$\max(f_A, -f_B)$
Scavo di A da B	$\bar{A} \cap B$	$(\sim A) \wedge B$	$\max(-f_A, f_B)$

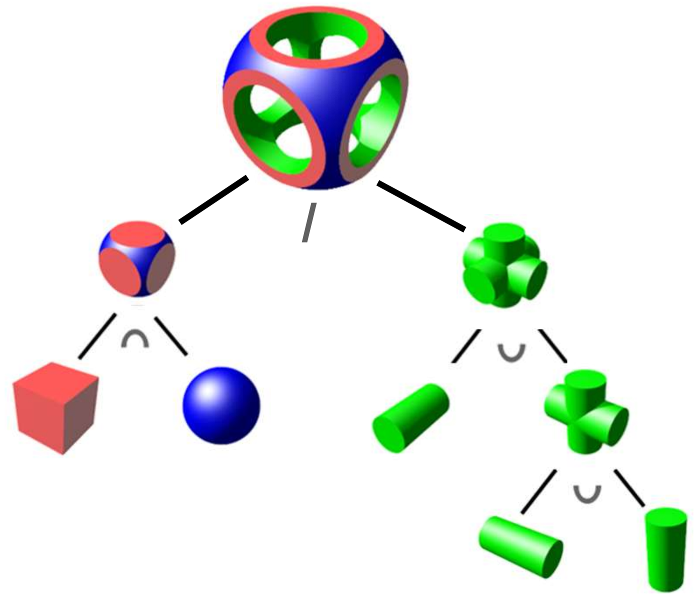
96

Operazioni booleane volumetriche di modelli impliciti



97

Constructive Solid Geometry (CSG)

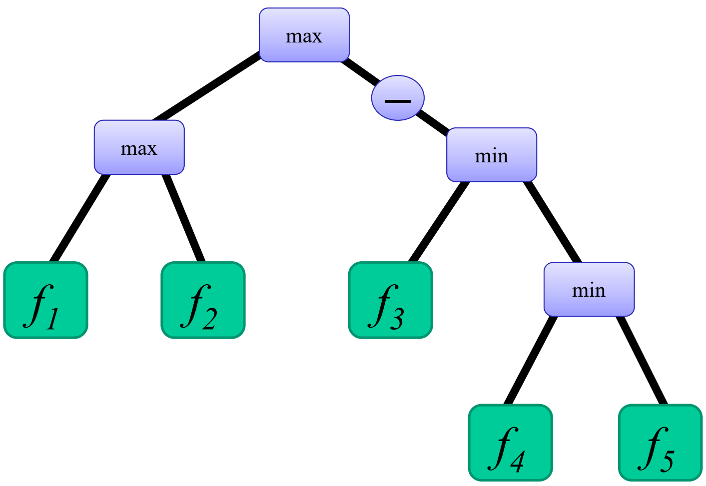


99

Geometric Solid Modelling

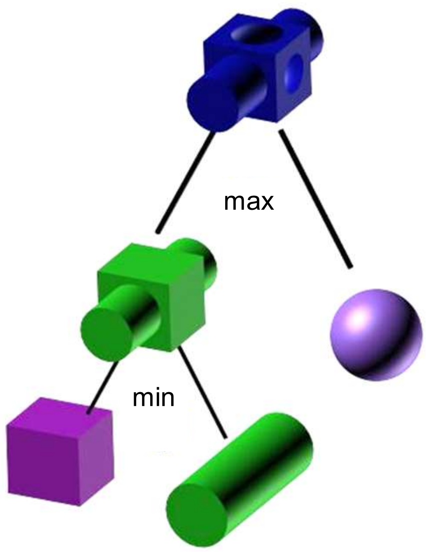
Albero di parsing delle operazioni

$$f(\mathbf{p}) = \max\Big(\max(f_1(\mathbf{p}), f_2(\mathbf{p}))\ , -\min\big(f_3(\mathbf{p}), \min(f_4(\mathbf{p}), f_5(\mathbf{p}))\big)\Big)$$



100

Constructive Solid Geometry CSG: altro esempio



101

Constructive Solid Geometry

- ✓ Idea: modellare oggetti solidi 3D a partire dalle forme più semplici («primitive») che li compongono
- ✓ Utile per modellare oggetti **meccanici / artificiali**
  - ⇒Contesto CAD
- ✓ Il modello è rappresentato da una struttura ad albero
  - ⇒radice = l’intero oggetto
  - ⇒nodi interni = operazioni booleane dei nodi figli
  - ⇒foglie = forme basilari – associate a funzioni primitive (esempio: sfere, cilindri, semispazi, cubi…)
- ✓ E’ l’albero di parsing di un’espressione di operazioni booleane

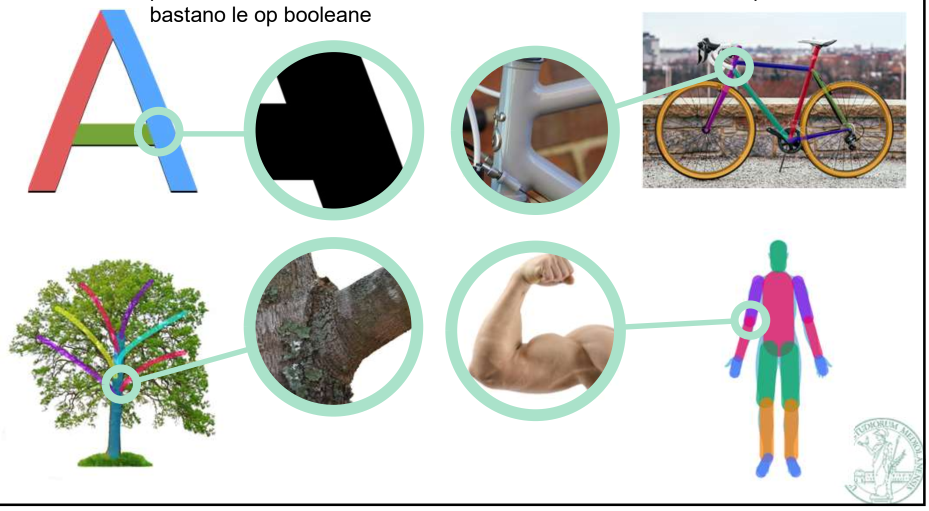
102

Oltre alle sempici operazioni booleane…

- ✓ Per molti oggetti, è utile unire le sottoparti con operazioni diverse da quelle booleane

Esempio:
per una lettera di un font,
bastano le op booleane

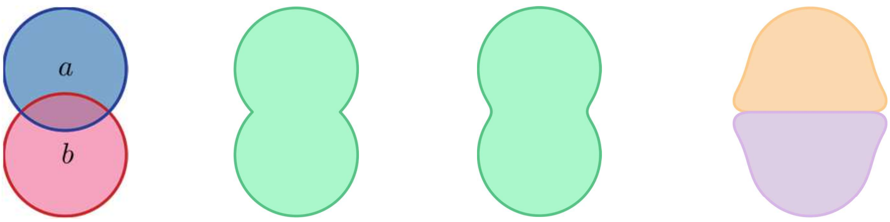
Ma la fusione fra due tubi
in una biciletta (welding)
non è ben approssimata
da una op booleana



103

Funzioni per combinare modelli impliciti

	union [Sabin 1968]	blend [Blinn 1982] [Ricci 1973]	contact & bulge [Cani 1993]



$\min(\,a, b\,)$

$a + b$

$\sqrt{a^n + b^n}^{\frac{1}{n}}$

$$\begin{cases} a - b + 1 & \text{if } b > 1 \\ a + h(a,b) & \text{else} \end{cases}$$

see «meta-balls»

104

Marco Tarini
Università degli Studi di Milano

Modelli impliciti VS modelli di voxel: osservazione

- ✓ Un modello volumetrico di voxel (con valori scalari) può essere considerato un caso particolare di modello implicito
  - ⇒ La funzione f è definita dall'interpolazione trilineare dei valori memorizzati nei voxel, sottratta la soglia desiderata
- ✓ Un modello implicito può essere trivialmente convertito in un modello volumetrico di voxel (con valori scalari)
  - ⇒ Basta valutare la funzione f sul centro di ogni voxel e memorizzare il valore nel voxel, discretizzandola
  - ⇒ In altri termini, la funzione f può essere *tabellata*
- ✓ L'occupazione in RAM delle due strutture è radicalmente diverso

105

Da modello implicito a mesh

- ✓ Modo comune (ma non l'unico)
- ✓ Passi:
  - ⇒ Costruire prima un **modello 3D di voxel** (con una data risoluzione resx, resy, resz) come visto sopra, cioè campiondando f sui ogni voxel

    parametri del procedimento
  - ⇒ estrarre una mesh poligonale M attraverso **Marching Cubes** (con soglia 0)
  - ⇒ bonus: calcolare le **normali** nei vertici di M, valutando i **gradienti** di f nelle posizioni dei vertici di M

    (questo è preferibile al calcolo delle normali dei vertici attraverso le normali dei triangoli, cioè nel modo che abbiamo visto per mesh triangolari generiche)

106

Da modello implicito a mesh («esplicitare» un modello implicito»)

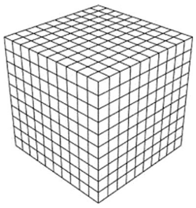
✓ Un modo semplice (non necessariamente l'unico) di farlo è…

1. Valutazione di f alla posizione di ogni voxel

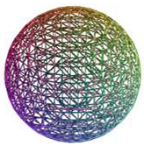
2. Marching cubes (con soglia 0)

$$f\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix} = x^2 + y^2 + z^2 - r^2$$

Modello implicito (funzione primitiva)



SDF come dataset di voxel (con un valore scalare per ogni voxel)



Mesh

Scelta: a che risoluzione?

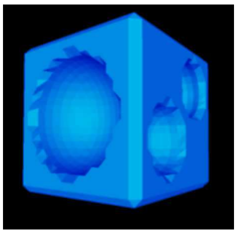
107

Rendering di un modello implicito

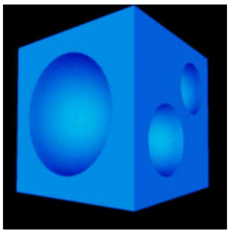
✓ una sup implicita può anche essere renderizzata direttamente

- ⇒ attraverso algoritmi di ray-tracing
- ⇒ (vedi seconda parte del corso)

senza conversione in una mesh



Rendering della mesh ottenuta con marching cubes



Rendering diretto con un algoritmo di ray-tracing

108