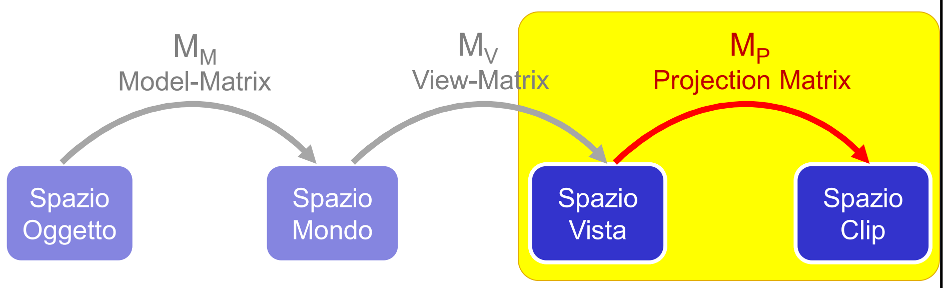
Trasformazione di proiezione

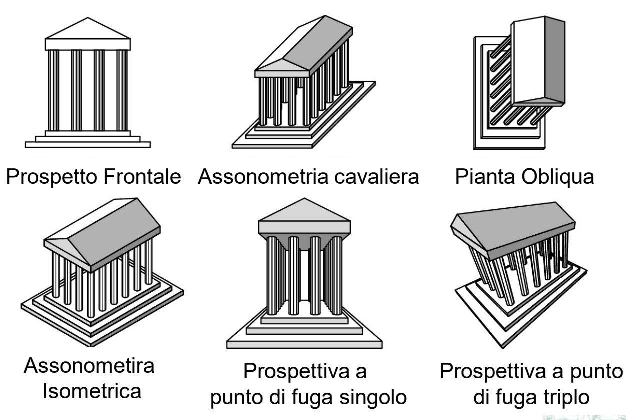


2

Trasformazione di proiezione

- ✓ Vecchio problema:
  - ⇒ in arte, architettura progettazione
- ✓ come riportare
  - ⇒ oggetti 3D
  - ⇒ su un piano 2D

Alcune soluzioni classiche:



3

Trasformazione di proiezione “ortogonale” (o “ortografica”)

- Un modo facile per proiettare da 3D a 2D? (proiettare perdere una dimesione)
  - ⇒facile: azzerare la *z*
  - ⇒matrice corrisponente:

$$P_Z = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

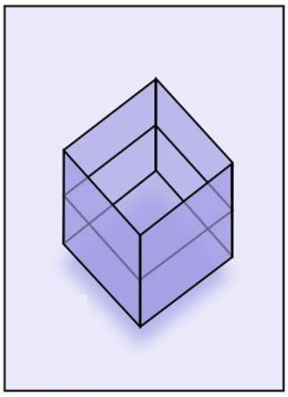
4

Trasformazione di proiezione “ortogonale” (o “ortografica”)

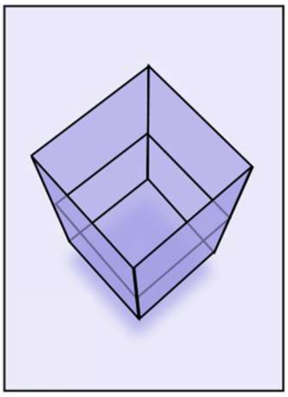
- Abbiamo ottenuto una *proiezione ortogonale*
  - ⇒non c’è alcuna prospettiva: la dimensione (a schermo) degli oggetti *non* dipende dalla loro distanza dall’osservatore
  - ⇒le linee parallele (in spazio vista, mondo, oggetto) rimangono parallele anche a schermo
  - ⇒la direzione di vista è costante in ogni pixel
  - ⇒Approssima una situazione che in una foto reale è ottenibile come:
    - lunghezza focale molto lunga
    - Es un un cannocchiale molto potente che inquadra la scena da molto distante

6

Differenze



Proiezione
ortografica

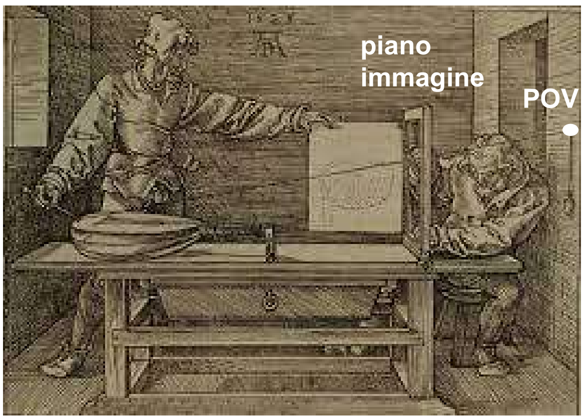


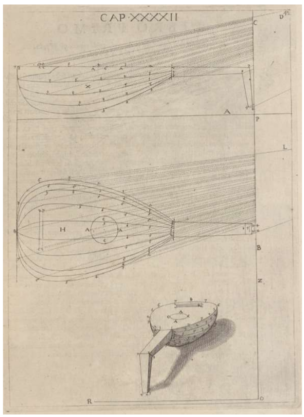
Proiezione
prospettica

Vediamo come ottenere una matrice di proiezione prospettica

8

Proiezione prospettica: un task studiato a lungo nella storia

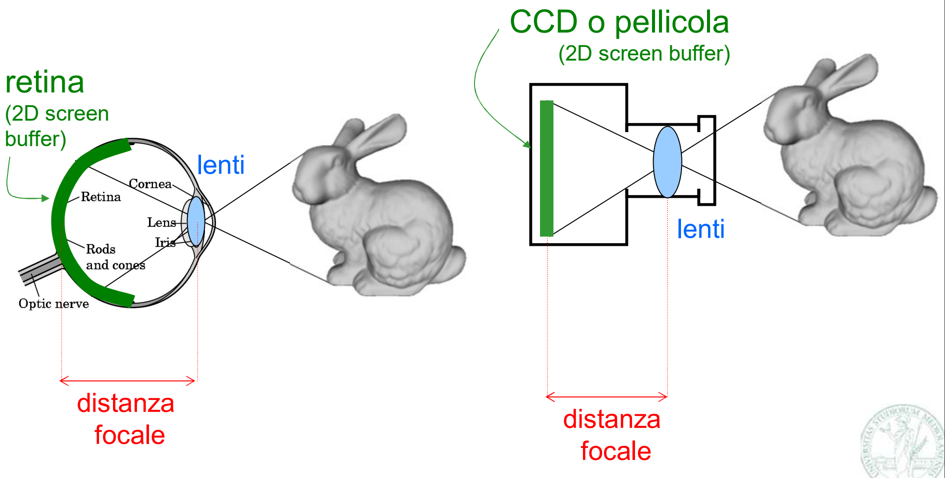




9

Come si svolge fisicamente il processo:

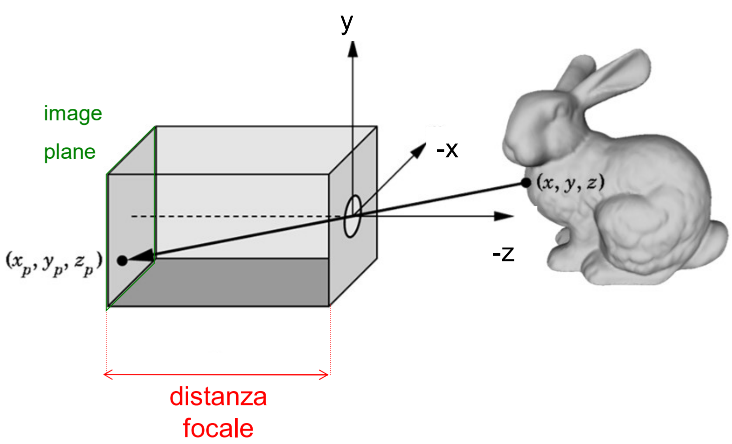
- ✓ Human Visual System (HVS) o macchina fotografica, questo concetto è lo stesso:



10

Nostro modello semplificato:

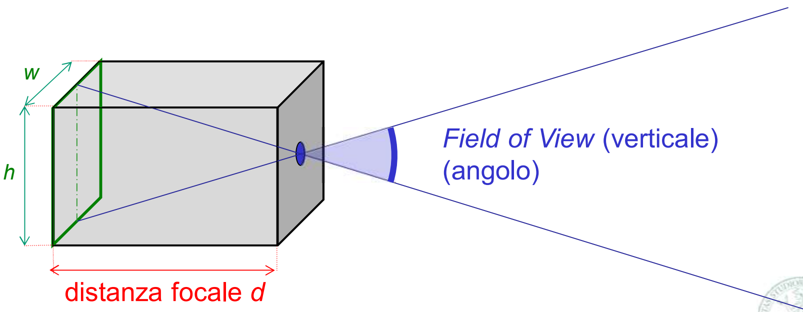
- ✓ pin-hole camera



11

Parametri *intrinseci* della camera: (solo i principali)

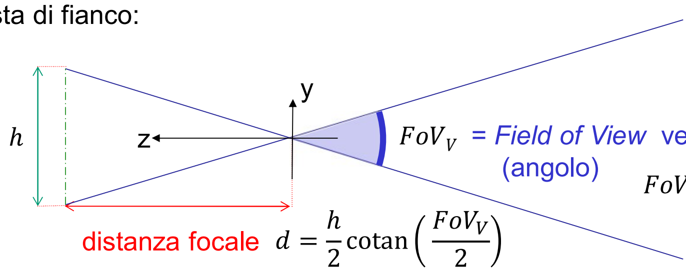
- ✓ dimensioni image plane (*w* , *h*) (in spazio vista)
- ✓ distanza focale (*d*) (in spazio vista) *oppure* Field of View (FoV)
  - ⇒ si possono ottenere uno dall'altro, sapendo *h* (come?)
  - ⇒ il valore *d* è facile da usare nei conti, ma FoV è intuitivo da determinare:
    - FoV grande >60° (dist foc. piccola): «grandangolo»
    - FoV piccolo <45° (dist foc. grande): «teleobiettivo»



12

Da **Field of View** (verticale o orrizontale) a **Distanza focale**, o viceversa

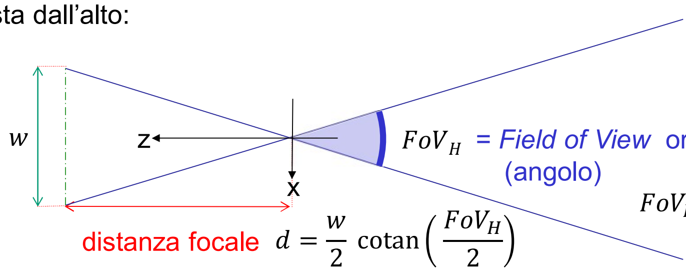
Vista di fianco:



$$FoV_V = 2 \arctan\left(\frac{h}{2d}\right)$$

$$d = \frac{h}{2} \operatorname{cotan}\left(\frac{FoV_V}{2}\right)$$

Vista dall'alto:



$$FoV_H = 2 \arctan\left(\frac{w}{2d}\right)$$

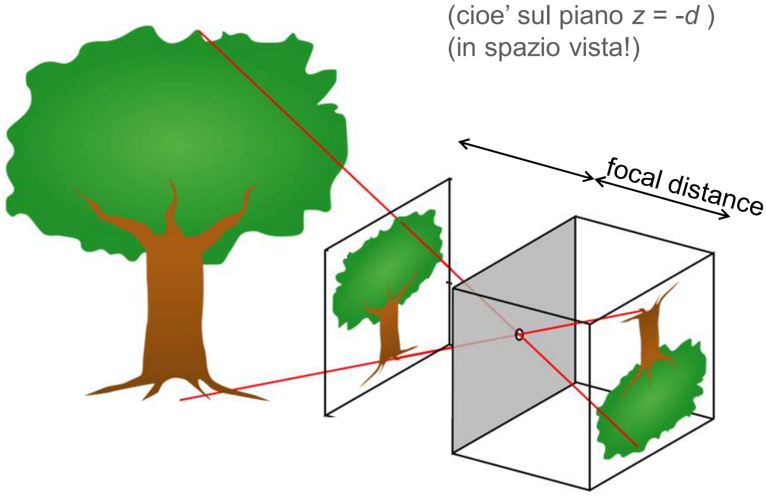
$$d = \frac{w}{2} \operatorname{cotan}\left(\frac{FoV_H}{2}\right)$$

14

Pin Hole camera

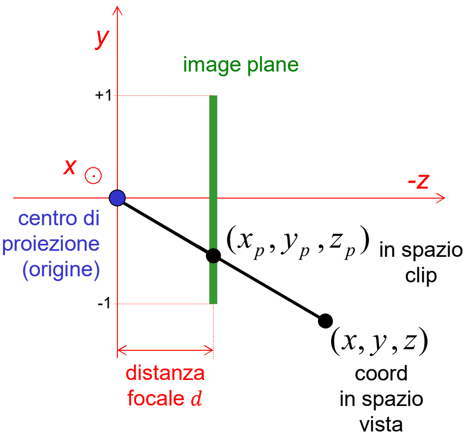
per semplicità, immaginiamoci il piano immagine *davanti* alla camera (e nn ribaltato), piuttosto che·· dietro (e ribaltato).

(cioe' sul piano *z* = -*d*)
(in spazio vista!)



15

Matematicamente…



$$\begin{pmatrix} x_p \\ y_p \\ z_p \end{pmatrix} = k \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$ con k t.c. $z_p = -d$

quindi…

$k = -d / z$ e $$\begin{pmatrix} x_p \\ y_p \\ z_p \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -d \cdot x / z \\ -d \cdot y / z \\ -d \end{pmatrix}$$

16

Estendiamo la rappresentazione di punti e vettori in coordinate **omogenee**

Punti:

$$\neq 0 \Rightarrow \quad \mathbf{p} = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ * \end{bmatrix}$$

Vettori:

$$0 \Rightarrow \quad \vec{v} = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ 0 \end{bmatrix}$$

19

Estendiamo la notazione

✓ Posso esprimere i *punti* anche con la notazione

$$\mathbf{p} = \begin{bmatrix} wx \\ wy \\ wz \\ w \end{bmatrix} \quad \text{con} \quad w \neq 0$$

$$\begin{bmatrix} wx \\ wy \\ wz \\ w \end{bmatrix} \xrightarrow{\text{divisione per 4ta comp}} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ 1 \end{bmatrix}$$

anche detta normalizzazione affine

20

Estendiamo la notazione

✓ Per es:

$$\begin{bmatrix}20\\10\\30\\10\end{bmatrix} \begin{bmatrix}2\\1\\3\\1\end{bmatrix} \begin{bmatrix}0.2\\0.1\\0.3\\0.1\end{bmatrix} \begin{bmatrix}4\\2\\6\\2\end{bmatrix} \dots$$

sono alcune delle **coordinate omogenee** del **punto** che ha queste **coordinate cartesiane**

$$\begin{bmatrix}2\\1\\3\end{bmatrix}$$

punto

questa qui è in "forma canonica" (w = 1)

$$\begin{bmatrix}2\\1\\3\\0\end{bmatrix}$$

sono le uniche **coordinate omogenee** del **vettore** che ha queste **coordinate cartesiane**

$$\begin{bmatrix}2\\1\\3\end{bmatrix}$$

vettore

21

Coordinate omogenee di punti (riassunto)

✓ Il punto P di coordinate cartesiane (x,y,z)
è rappresentato in coordinate omogenee
come (xw,yw,zw,w), con w qualsiasi, eccetto 0

✓ Coordinate omogenee diverse (x, y, z, w) e (x', y', z', w')
possono rappresentare lo stesso punto;
⇒ quando?

✓ Quando $w = 1$ (forma *canonica*) le coord cartesiane del punto
coincidono con le prime tre coord omogenee.

✓ Con $(x, y, z, w \neq 0)$ si rappresentano *punti*,
con $(x, y, z, 0)$ si rappresentano*vettori.*

22

Coordinate omogenee (o affini)

- ✓ Tutte le matrici di trasformazione che abbiamo visto fin'ora continuano a funzionare anche con i punti espressi in coordinate omogenee non canoniche ($w \neq 1$)
- ✓ Esempio, traslazione:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 5 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} 20 \\ 15 \\ 50 \\ 10 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 70 \\ 35 \\ 80 \\ 10 \end{pmatrix}$$

Matrice di traslazione di (+5 , +2 , +3)

Punto di coord cartesiane (2 , 1.5 , 5)

Punto di coord cartesiane (7 , 3.5 , 8)

(+5 , +2 , +3)

- ✓ Ora possiamo esprimere anche la proiezione prospettica…

23

Matrice di proiezione prospettica

matrice di trasformazione per la **proiezione prospettica** (nota: non è affine)

$$\mathbf{P} = \begin{bmatrix} d & 0 & 0 & 0 \\ 0 & d & 0 & 0 \\ 0 & 0 & d & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \end{bmatrix}$$

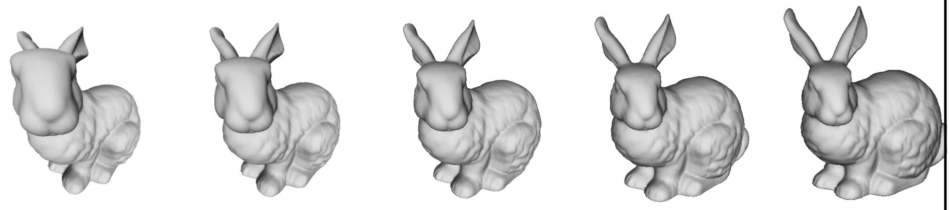
$$\mathbf{P}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} d \cdot x \\ d \cdot y \\ d \cdot z \\ -z \end{pmatrix}$$

…che esprime il punto di coordinate *cartesiane*… (divido per w)

$$\begin{pmatrix} -x \cdot d/z \\ -y \cdot d/z \\ -d \end{pmatrix}$$

25

Proiezione Prospettica: che effetto fa



d piccolo

$$\mathbf{P} = \begin{bmatrix} d & 0 & 0 & 0 \\ 0 & d & 0 & 0 \\ 0 & 0 & d & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \end{bmatrix}$$

d grande

Più distorsione prospettica.

Effetto "fish-eye" (grandangolo)

Proporzioni più mantenute

Effetto "zoom" (eg. vista dal satellite)

27

Un problema con questa matrice di proiezione: schiaccia la scena su un piano a Z costante

normalizzazione affine (per l'estrazione di coordinate Cartesiane)

$$\begin{pmatrix} d & 0 & 0 & 0 \\ 0 & d & 0 & 0 \\ 0 & 0 & d & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} d \cdot x \\ d \cdot y \\ d \cdot z \\ -z \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} -x \cdot d/z \\ -y \cdot d/z \\ -d \\ 1 \end{pmatrix}$$

perspective matrix

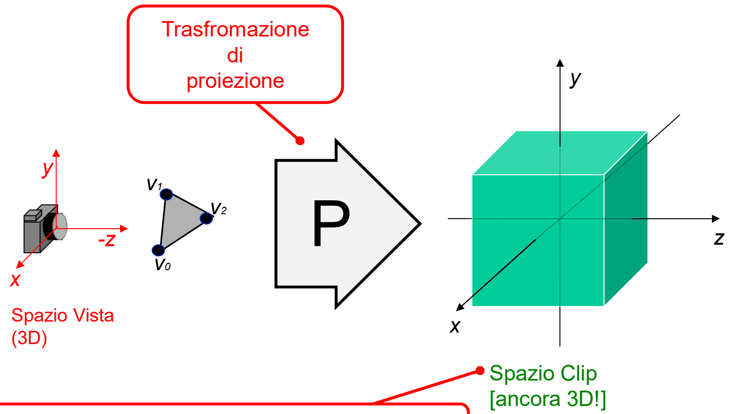
view coords

clip coords

Il valore di z risulta **costante** .
Formalmente è corretto
(dato che il punto finisce sempre sul piano immagine)
ma perdiamo una dimensione inutilmente

28

In realtà la trasf. di Proiezione non deve perdere la terza dimensione: ci servirà

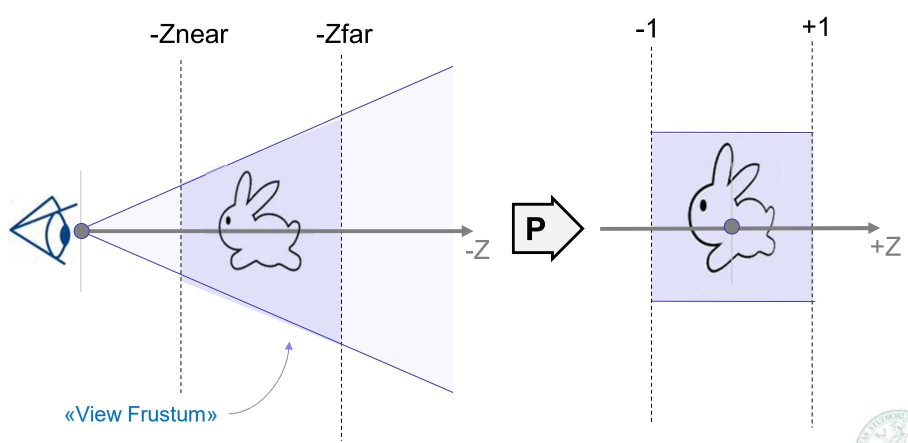


La parte visibile casca sempre in
[-1,+1] × [-1,+1] × [-1,+1]
(*indipendentemente* dalla dimensione, aspect ratio, o risoluzione dello schermo).
(per questo le coord in spazio clip sono dette anche "Normalized Device Coordinates" , NDC)

30

Modificare la matrice di proiezione per produrre una z in spazio clip fra -1 e +1

In Spazio Vista: In spazio Clip:



31