

1

Algebra di punti e vettori – come studiare

- ✓ Anche se non si tratta di CG, queste basi sono necessarie ad una piena comprensione degli argomenti
 - ⇒ (e vengono chieste all'esame)
- ✓ Come appianare le eventuali lacune:
 - ⇒ Libri di testo consigliati
 - ⇒ In rete

Possibile libro di testo:
Mathematics for 3D Games and Computer Graphics
Eric Lengyel
Chapters 2, 3

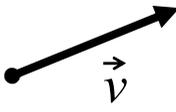


2

Punti e vettori: cosa rappresentano

<p>✓ Punto</p> <p>⇒ una posizione nello spazio</p>	<p>✓ Vettore (geometrico)</p> <p>⇒ uno spostamento nello spazio</p> <p>⇒ Il delta fra due posizioni</p> <p>⇒ nota: non è riferito ad una specifica posizione!</p> <p>⇒ ha una <i>lunghezza</i> e una <i>direzione</i></p>
---	---

Punti e vettori: spesso disegnati come...

<p>✓ un pallino</p> <div style="text-align: center; margin-top: 20px;">  </div>	<p>✓ una freccia</p> <div style="text-align: center; margin-top: 20px;">  </div>
--	--



3

Punti & Vettori Geometrici

	representa:	esempi:	Immaginali / disegni come...
a Punto	Una posizione, una locazione	Dove sta qualcosa Il centro di una sfera	Un piccolo pallino :-D
un Vettore	Uno spostamento La differenza spaziale fra due punti Il vettore che li connette	La velocità di un oggetto L'accelerazione di gravità Come raggiungere A da B	Una freccetta :-D (con una data direzione e lunghezza) (nota: non è relativa a nessuna posizione particolare)
uno scalare	Una qualità reale (positiva o negativa)	Il peso di una persona L'area di un triangolo	-



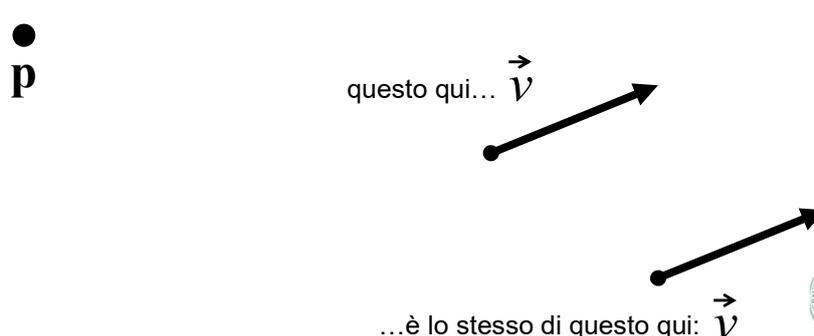
4

Punti e vettori: disegnati come

✓ Punti: un pallino

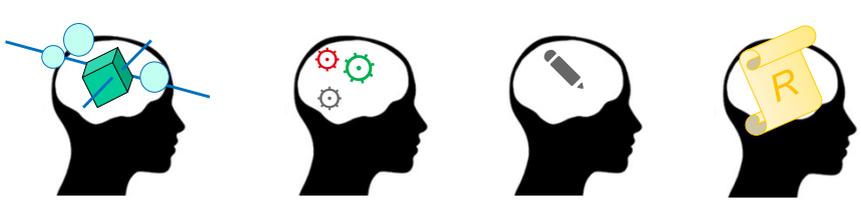
✓ Vettori: una freccetta

⇒ Nota:
La freccetta sarà pur disegnata da qualche parte, ma non ha una posizione



5

Operazioni con punti e vettori: todo list



spaziale
come immaginarle

operazionale
come computarle

sintattica
come scriverle

algebraica
come manipolarle



6

Algebra di punti e vettori

- ✓ Accertati di comprendere ogni operazione che vedremo dal punto di vista:



intuitivo / spaziale :

cosa "fa" l'operazione dal punto di vista geometrico



operazionale:

- come computare il risultato a partire
- (1) dalle coordinate degli operandi
 - (2) per i prodotti di vettori: anche dalle loro lunghezze e gli angoli



sintattico:

- come scrivere le operazioni
- (1) su carta (con che notazione)
 - (2) in un linguaggio di programmazione (per es; in lib C++, o un linguaggio come GLSL...)



7

Algebra di punti e vettori

- ✓ Inoltre, familiarizza con le loro



regole algebriche delle operazioni, come

- ⇒ è commutativa?
- ⇒ è commutativa?
- ⇒ distribuisce? (con un'altra op)
- ⇒ è invertibile?
- ⇒ quale è l'op inversa?
- ⇒ ha un elemento neutro? Un elemento assorbente?



8

Rappresentazione interne di punti e vettori

✓ triplette di **Coordinate Cartesiane**

⇒ Ciascuna, un valore scalare

⇒ Per es:

```
class Vector3 {  
    // fields:  
    public float coords[3];  
  
    // methods:  
    ...  
}
```

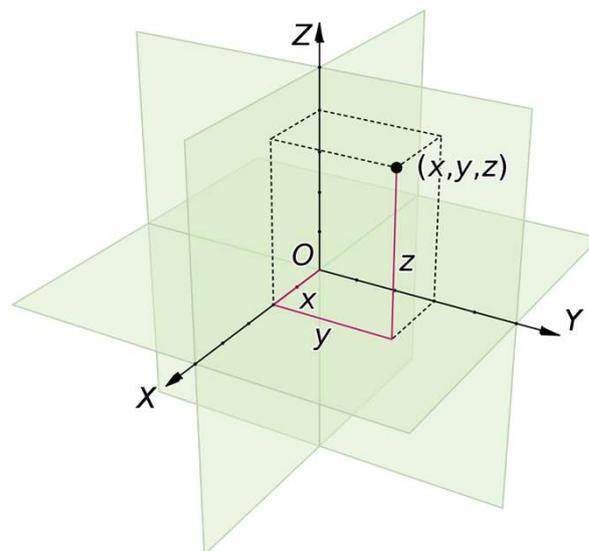
oppure:

```
class Vector3 {  
    // fields:  
    public float x, y, z;  
  
    // methods:  
    ...  
}
```



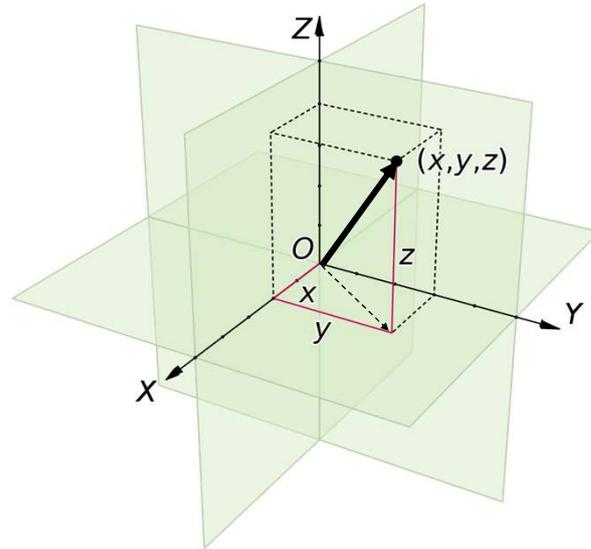
9

Espresso in Sistema di coordinate ("Cartesiano")



10

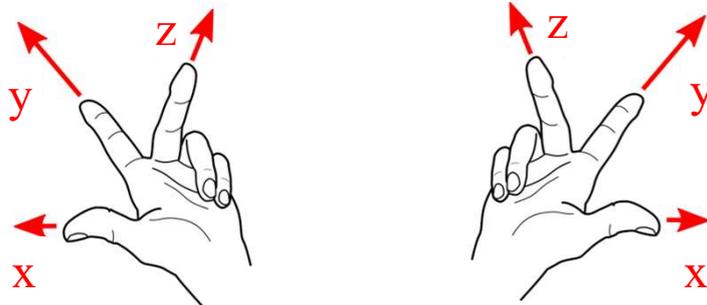
Espresso in Sistema di coordinate ("Cartesiano")



11

Mano destra o mano sinistra

✓ Ambiguità: come stiamo *immaginando* il Sistema di riferimento?



12

Coding: 1 struttura dati, tante semantiche

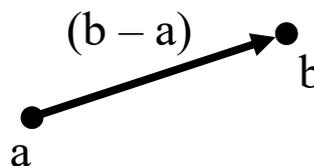
- ✓ Molte librerie e linguaggi usano uno stesso **data type** sia per punti 3D che per vettori 3D (e altro: versors, colori...)
 - ⇒ “vec3d”, “Point3D”, “vector” etc – vedi lab
- ✓ Tuttavia, la semantica non è la stessa
 - ⇒ Nulla di strano!
 - ⇒ Usiamo comunemente uno stesso tipo (“float”, “double”) per rappresentare cose molto diverse fra loro (per es, un peso, un volume, una temperatura).
- ✓ E' responsabilità del programmatore operare su questi dati in modo coerente.
 - ⇒ Per es: non ha senso sommare una temperatura con un'area
 - ⇒ Pe es: ha senso dividere un peso per un volume (e si ottiene un peso specifico)
- ✓ Quali operazioni hanno senso fra punti, vettori e scalari?
 - ⇒ Cioè: quale è la loro algebra?



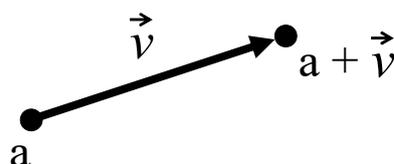
13

Point and vector algebra (summary)

- ✓ Differenza:
punto – punto = vettore



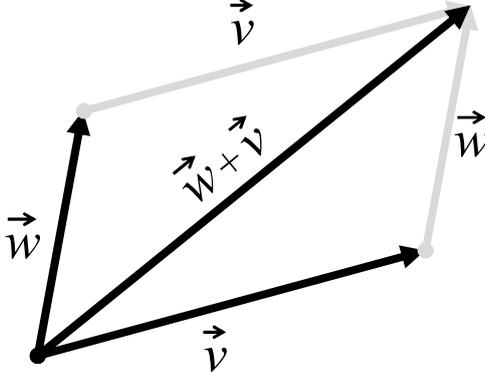
- ✓ Somma:
punto + vettore = punto



14

Vector algebra: somma fra vettori

✓ vettore + vettore = vettore



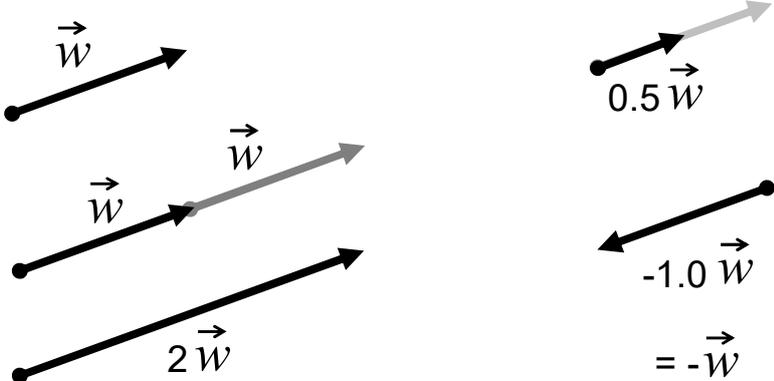
The diagram shows a vector \vec{v} starting from a point and ending at another. A second vector \vec{w} starts at the tip of \vec{v} and ends at a third point. A third vector, $\vec{w} + \vec{v}$, starts at the same origin as \vec{v} and ends at the same tip as \vec{w} . The vectors \vec{v} and \vec{w} are black, while $\vec{w} + \vec{v}$ is grey.



15

Vector algebra: scalatura di un vettore

✓ scalare · vettore = vettore



The diagram shows a vector \vec{w} and its scalar multiples. On the left, $0.5\vec{w}$ is a shorter vector in the same direction, $2\vec{w}$ is a longer vector in the same direction, and $-1.0\vec{w} = -\vec{w}$ is a vector of the same length pointing in the opposite direction. On the right, the same three cases are shown with the resulting vectors in grey.



16

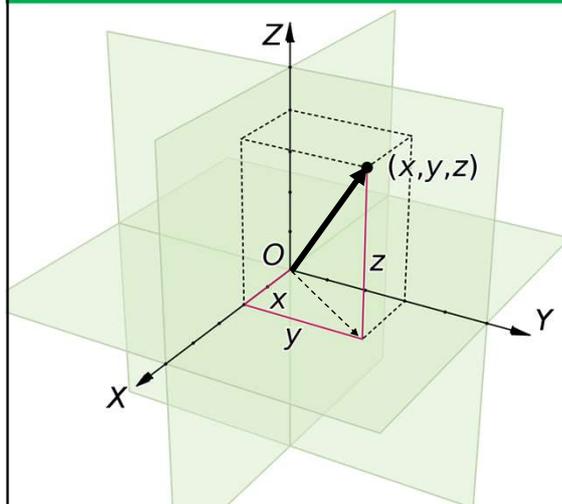
Vector algebra: scalatura di un vettore (note)

- ✓ Scalare un vettore di un fattore scalare k lascia inalterata la sua direzione ma moltiplica la sua lunghezza per k
- ✓ Se $k > 1$: lo allunga
Se $k = 1$: lo lascia inalterato
- ✓ Se k fra 0 e 1: lo accorcia
- ✓ Se $k = 0$: otteniamo il vettore detengere
 - ⇒ Il vettore $(0,0,0)$: l'unico vettore lungo 0;
 - ⇒ degenerare perché non ha una direzione
- ✓ Se k fra -1 e 0: lo accorcia e lo ribalta
 - ⇒ Cioè inverte la direzione
- ✓ Se $k = -1$: lo ribalta
- ✓ Se $k < -1$: lo ribalta e lo allunga



17

Calcolo della norma



Applicando il teorema di pitagora (2 volte):

$$\|\vec{v}\| = \sqrt{v_x^2 + v_y^2 + v_z^2}$$



18

Vector algebra: operation between vectors

✓ differenza (fra vettori):
vettore - vettore = vettore

\vec{w}
 \vec{v}
 $-\vec{v}$
 $\vec{w}-\vec{v}$
 $\vec{w}-\vec{v}$



19

Vector algebra: operation between vectors

✓ difference (between vectors):
vector - vector = vector

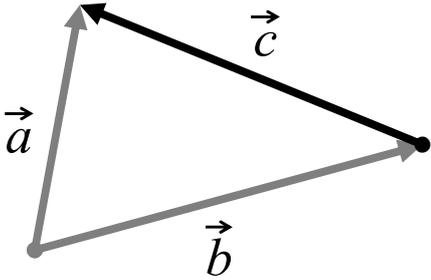
\vec{w}
 \vec{v}
 $\vec{w}-\vec{v}$



20

Vector algebra: operation between vectors

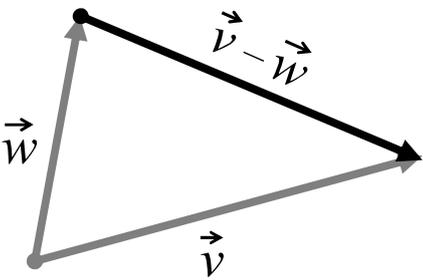
✓ difference (between vectors):
vector - vector = vector



21

Vector algebra: operation between vectors

✓ difference (between vectors):
vector - vector = vector



22

Alcune operazioni fra vettori (recap)

Operazioni lineari:

✓ somma (fra vettori):

$$\text{vettore} + \text{vettore} = \text{vettore}$$

✓ scalatura (o, prodotto con uno scalare)

$$\text{scalare} \cdot \text{vettore} = \text{vettore}$$

⇒ Di solito, si omette il simbolo dell'operatore \cdot

✓ Opposto, o flip (inversione del verso)

$$-\text{vettore} = \text{vettore}$$

⇒ E' un modo per scrivere la moltiplicazione con lo scalare -1

✓ Sottrazione fra vettori

$$\text{vettore} - \text{vettore} = \text{vettore}$$

⇒ E' un modo per scrivere la somma con il vettore opposto



23

Un primo esempio di problemi geometrici

✓ Usando le nostre operazioni, siamo in grado di risolvere problemi di natura geometrica come...:

⇒ Dati due posizioni **a** e **b**,

trovare il punto **c** che raggiungo se parto da **a** e mi muovo verso **b** in linea retta, ma faccio il doppio della strada che mi porterebbe a raggiungere **b**

⇒ Date due posizioni **a** e **b**, trovare il punto **c** intermedio del segmento che li congiunge

⇒ Date due posizioni **a** e **b**, trovare la posizione **c** sul segmento che li congiunge che dista da **b** il doppio di quanto dista da **a**



24