

Marco Tarini - Computer Graphics 2022/2023
Università degli Studi di Milano

Algebra di Punti e Vettori - part II

25

Point and vector algebra: norma

✓ norma di un vettore = uno scalare

26

Norma di un vettore

- ✓ Terminologia: è detta anche:
 - ⇒ lunghezza, magnitudine, intensità, estensione, norma-2, norma Euclidea, o anche solo norma
 - ⇒ in realtà, “norma” è un termine più generico che può denotare altre funzioni (non usate in questo corso)
- ✓ Scritta come $\|\vec{v}\|$ o $\|\vec{v}\|_2$ o (a volte) $|\vec{v}|$
- ✓ Calcolata come

$$\|\vec{v}\| = \sqrt{v_x^2 + v_y^2 + v_z^2}$$

dove v_x, v_y, v_z sono le coordinate del vettore

(come si evince applicando il teorema di pitagora... due volte)

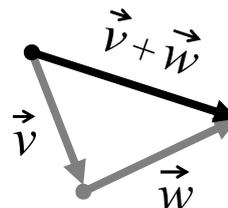
- ✓ Denotata nel codice (in librerie o linguaggi di programmazione) come funzione o metodo
`length(v)` o `v.length()` o `v.norm()` ... o simile
- ✓ Rappresenta: l'estensione di un vettore



27

Alcune caratteristiche della norma

- ✓ La **norma** è sempre ≥ 0 , ed è 0 solo per vettori **nulli**
 - ⇒ vettore nullo = vettore (0,0,0)
 - ⇒ detto anche “**degenere**” perché non ha una direzione
- ✓ **Distanza** fra due **punti** a e b :
norma della loro differenza $\|a - b\|$
- ✓ **Norma** e **scalatura di vettore**:
 $\|k \vec{v}\| = |k| \|\vec{v}\|$
- ✓ **Norma** e **somma vettoriale**:
 $\|\vec{v} + \vec{w}\| \leq \|\vec{v}\| + \|\vec{w}\|$
 (“disuguaglianza triangolare”)



28

Un esempio di problema geometrico

✓ Siano date due sfere, con i centri in posizione \mathbf{c}_0 e \mathbf{c}_1 e raggio r_0 e r_1
C'è intersezione (si toccano / compenetrano?)

✓ Soluzione: sì, se

$$\|\mathbf{c}_0 - \mathbf{c}_1\| < r_0 + r_1$$

✓ Cioè se...

$$\|\mathbf{c}_0 - \mathbf{c}_1\|^2 < (r_0 + r_1)^2$$

Esercizio:

⇒ Verifica il tipo della formula qui sopra, incluso il tipo (punto, vettore, scalare) di ogni sottoespressione

⇒ Perché la seconda espressione è più efficiente da computare della prima?



30

Unit vectors

Vettori a lunghezza 1

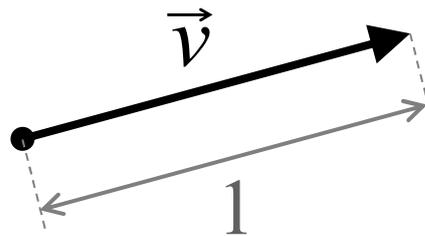
✓ anche detti:

⇒ vettori unitari

⇒ vettori normali

o anche solo "normali"
(soprattutto quando sono
ortogonali ad una superficie)

⇒ versori



✓ A volte denotati con il cappuccio invece che la freccetta, così: \hat{v}

✓ Rappresentano: una direzione



31

Normalizzazione di un vettore (operazione)

- ✓ Dato un vettore (in generale, non unitario), estrarre la sua direzione (come vettore unitario)
 - ⇒ In pratica, estrarre la direzione di un vettore dato
- ✓ Come: basta dividere per la sua norma (cioè scalare per 1/norma)

$$\hat{v} = \frac{\vec{v}}{\|\vec{v}\|} \quad \text{cioè} \quad \hat{v} = \frac{1}{\|\vec{v}\|} \vec{v}$$

- ✓ L'unico vettore che non può essere normalizzato è il vettore nullo (o "degenere"), quello di tutti 0
 - ⇒ L'operazione causerebbe una divisione per zero
 - ⇒ È un vettore che non ha una direzione da estrarre!



32

Punti, Vettori, Direzioni, Scalari

	representa:	esempi:	Immaginalo in 3D / disegnano come...
a Punto	Una posizione 3D, Una locazione 3D	Dove sta il centro di un modello Il centro di una sfera	Un piccolo pallino :-D
un Vettore	Uno spostamento 3D La differenza spaziale fra due punti Il vettore che connette questi due punti	La velocità di un oggetto L'accelerazione di gravità Come raggiungere A partendo da B Un delta fra due posizioni	Una freccetta :-D Con una data direzione, verso, e lunghezza (nota: non ha una posizione: nei disegni, la freccia la posso disegnare dove torni più comodo)
un Vettore Unitario o Vettore Normale, o solo "normale", o direzione, o versore	Un orientamento 3D Una direzione 3D	La direzione nella quale è puntata la macchina fotografica La direzione "verso il basso" La direzione di vista La direzione Nord-Nord-Est La direzione dalla quale proviene la luce del sole L'orientamento di un piano (cioè la direzione ortogonale al piano, detta la normale del piano)	Una freccetta, ma la sua lunghezza non è rilevante
uno Scalare	Una qualità reale (positiva o negativa)	Il peso di una persona L'area di un triangolo	-

33