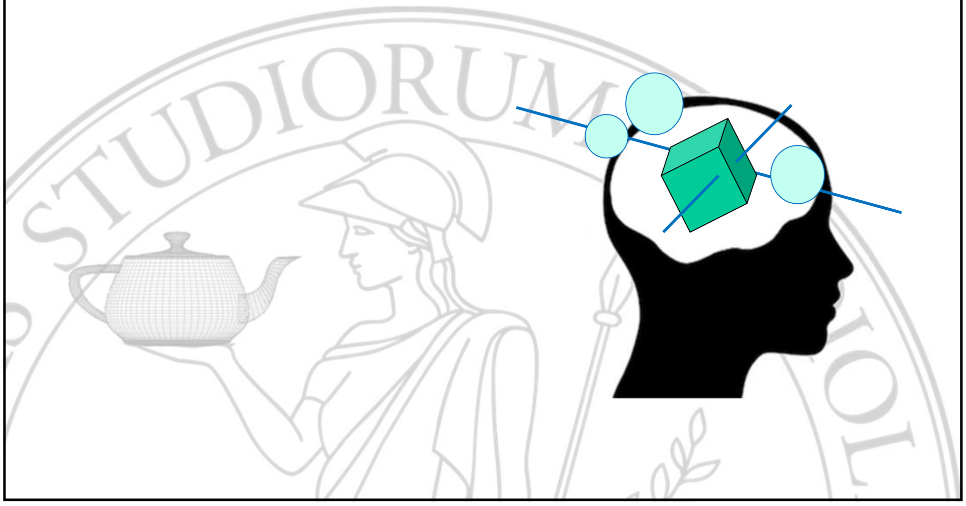
Marco Tarini - Computer Graphics 2022/2023
Università degli Studi di Milano

Interpolazione di punti e coordinate baricentriche



35

Combinazione lineare (di *n* vettori)

- ✓ I **vettori** sono dotati delle operazioni di
  - ⇒ scalatura (moltiplicaz per scalare)
  - ⇒ somma (vettoriale)
- ✓ Dunque, posso effettuare **combinazioni lineari** di due o più vettori

$$\vec{\mathbf{w}} = k_0 \, \vec{\mathbf{v}_0} + k_1 \, \vec{\mathbf{v}_1} + k_2 \, \vec{\mathbf{v}_2}$$

i **"Pesi"** della combinazione lineare

Combinazione lineare di $\vec{\mathbf{v}_0}$, $\vec{\mathbf{v}_1}$ e $\vec{\mathbf{v}_2}$

36

Interpolazione ed estrapolazione (di *n* vettori)

- Quando i pesi $k_0\ k_1\ k_2\ \ldots$ sono positivi e a somma 1:

  $\sum_i k_i = 1$ e $\forall\, i\,.\, 0 \le k_i \le 1$

  - ⇒ cioè quando i pesi sono una «partizione dell'unità»
- allora la combinazione lineare si chiama **interpolazione** (lineare) (convessa)
  - ⇒ O anche, semplicemente: una «media pesata»
  - ⇒ Caso particolare: se i pesi sono uguali (a $1/n$) : abbiamo una media
- Se invece

  $\sum_i k_i = 1$ ma $\exists\ i\,.\ k_i < 0$

- allora abbiamo una **estrapolazione** (lineare)

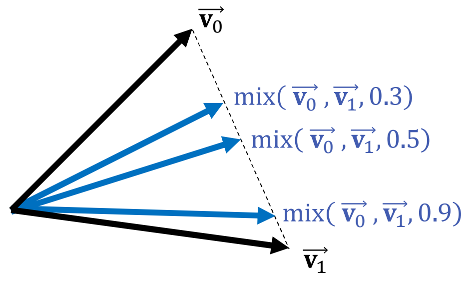
37

Interpolazione fra 2 elementi

- Quando $n\ =\ 2$, uno dei due pesi è esprimibile come differenza dell'altro
  - ⇒ quindi abbiamo un solo paramametro t)

$$\mathrm{mix}(\vec{\mathbf{v}_0}, \vec{\mathbf{v}_1}, t) = (1 - t)\,\vec{\mathbf{v}_0} + (t)\,\vec{\mathbf{v}_1}$$

Un modo di dire interpolazione



38

Come si interpola fra …

Interoplazione lineare

⇒…due **vettori** $\mathbf{v}_0$ e $\mathbf{v}_1$:

$$\mathbf{v}_0\,(1-t)+\mathbf{v}_1\,(t)$$

Moltiplicazione fra punti e scalari? Somma fra punti? Queste operazioni, prese individualmente, non hanno alcun senso geometrico

⇒…due **punti** $\mathbf{p}_0$ e $\mathbf{p}_1$:

$$\mathbf{p}_0\,(1-t)+\mathbf{p}_1\,(t)$$

è solo una riscrittura di:

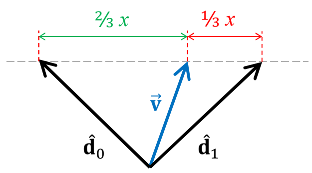
$$\mathbf{p}_0+(\mathbf{p}_1-\mathbf{p}_0)\,t$$

operazioni che hanno un senso geometrico (esercizio: verifica)

39

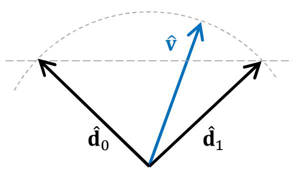
Interpolazione fra vettori unitari

✓ Attenzione! Interpolando fra due vettori unitari si ottiene un vettore non più unitario



$$\vec{\mathbf{v}} = ⅓\,\hat{\mathbf{d}}_0 + ⅔\,\hat{\mathbf{d}}_1$$

✓ Se si necessita un vettore untiario, occorre rinormalizzare dopo l'interpolazione



$$\hat{\mathbf{v}} = \frac{⅓\,\hat{\mathbf{d}}_0 + ⅔\,\hat{\mathbf{d}}_1}{\left\|⅓\,\hat{\mathbf{d}}_0 + ⅔\,\hat{\mathbf{d}}_1\right\|}$$

40

Interpolazione fra due elementi

- Terminologia: (usata in librerie, linguaggi di programmazione…)
  - ⇒ **interpolate** = **mix** = **blend** = **lerp**

“L” = espressamente lineare

- **Interpolare** fra coppie di <*qualcosa*> :
  - ⇒ mix(point , point , *t*) → point
  - ⇒ mix(vector , vector , *t*) → vector

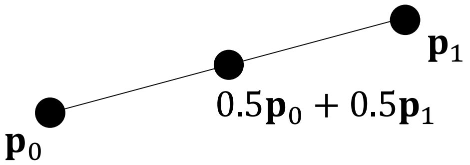
- *t* è il **«peso» scalare**
  - ⇒ *t* = 0 → prendi il primo dei due
  - ⇒ *t* = 1 → prendi il secondo dei due
  - ⇒ *t* ∊ (0,1) → prendi un misto dei due, ad esempio:
  - ⇒ *t* = 0.5 → prendi la **media** dei due
  - ⇒ *t* = 0.1 → quasi il primo, con un pochino del secondo
  - ⇒ *t* < 0 or t > 1 → **estrapolazione**

una interoplazione propriamente detta

41

Segmento come luogo di punti

- Dati due punti $\mathbf{p}_0$ e $\mathbf{p}_1$, analizziamo l’insieme di tutti i punti ottenibili interpolando $\mathbf{p}_0$ e $\mathbf{p}_1$:
- E’ il segmento che li connette!

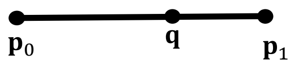


- “Un segmento è l’insieme dei punti ottenibili interpolando i suoi due estremi”
  - ⇒ Domanda (esercizio): qual è invece il luogo dei punti ottenibili come un’estraploazione di $\mathbf{p}_0$ e $\mathbf{p}_1$?

42

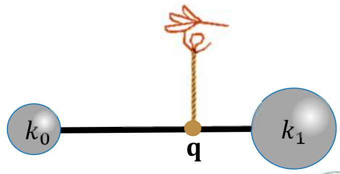
Coordinate baricentriche in un segmento

- E' anche vero il viceversa:
  qualsiasi punto in un segmento $\mathbf{S}$ è dato da una (e una sola!) interpolazione dei suoi due estremi $\mathbf{p}_0$ e $\mathbf{p}_1$
  - ⇒ Con i pesi opportunamente scelti
- Cioè dato un punto $\mathbf{q} \in \mathbf{S}$,
  esistono unici k_0 , $k_1 \in [0,1]$
  con $k_0 + k_1 = 1$
  tali che



$$\mathbf{q} = k_0\ \mathbf{p}_0 + k_1\ \mathbf{p}_1$$

- k_0 , k_1 sono dette le **coordinate baricentriche** di $\mathbf{q}$ nel segmento $\mathbf{S}$
  - ⇒ Perchè (motivazione storica)… se poniamo due masse k_0 e k_1 in $\mathbf{p}_0$ e $\mathbf{p}_1$, allora $\mathbf{q}$ diventa il baricentro del segmento

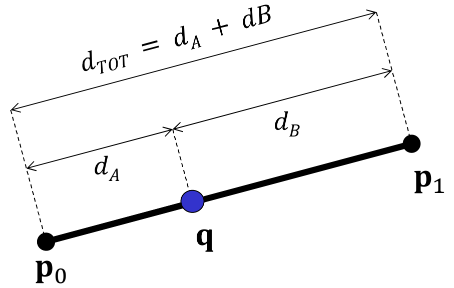


44

Coordinate baricentriche in un segmento

- Problema:
  - ⇒ dato un segmento $\mathbf{S}$ di estremi $\mathbf{p}_0$ e $\mathbf{p}_1$ e un punto $\mathbf{q} \in \mathbf{S}$,
    come trovo le coordinate baricentriche di $\mathbf{q}$?

$$\mathbf{q} = k_0\ \mathbf{p}_0 + k_1\ \mathbf{p}_1$$



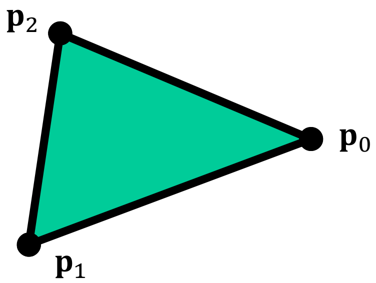
$$k_0 = dB \,/\, d_{TOT}$$
$$k_1 = d_A \,/\, d_{TOT}$$

- Soluzione:
  - ⇒ q spezza S in due sotto-segmenti. L'estensione di ciascun sottosegmento (diviso l'estensione totale di S) è la coordinata baricentrica relativa all'estremo OPPOSTO (verifica con delle prove)

45

Triangolo come luogo di punti

- Dati tre punti (in 2D oppure in 3D) $\mathbf{p}_0$, $\mathbf{p}_1$ e $\mathbf{p}_2$ consideriamo l'insieme di tutti i punti ottenibili dalla loro interpolazione
- E' il triangolo che ha i vertici in quei tre punti!



- "Un triangolo è l'insieme dei punti ottenibili interpolando i suoi tre vertici estremi"
  - ⇒ Domanda (esercizio): qual è invece il luogo dei punti ottenibili come una loro estraploazione ?

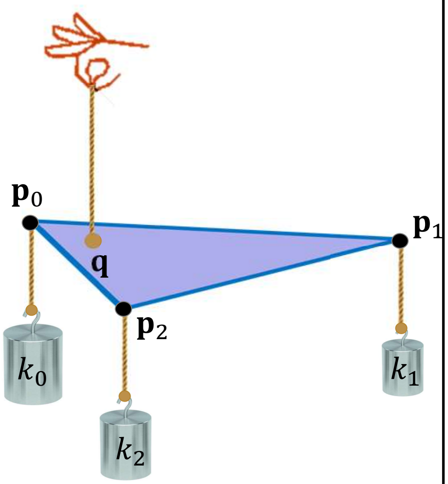
46

Triangolo come luogo di punti

- Dato un triangolo $\mathbf{T}$ (in 3D) di vertici $\mathbf{p}_0$ e $\mathbf{p}_1$ e $\mathbf{p}_2$ e un punto $\mathbf{q} \in \mathbf{T}$, esistono unici k_0 , k_1 , $k_2 \in [0,1]$ con $k_0 + k_1 + k_2 = 1$ tali che

$$\mathbf{q} = k_0\ \mathbf{p}_0 + k_1\ \mathbf{p}_1 + k_2\ \mathbf{p}_1$$

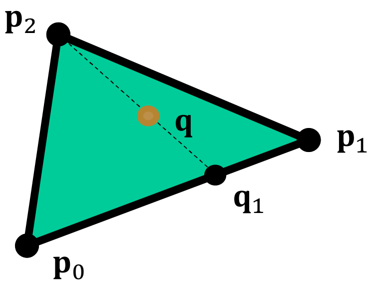
- k_0, k_1, k_2 sono dette le **coordinate baricentriche** di $\mathbf{q}$ nel triangolo $\mathbf{T}$
  - ⇒ Stessa motivazione storica…
    se poniamo dei pesi k_0 , k_1 e k_2
    in $\mathbf{p}_0$, $\mathbf{p}_1$ e $\mathbf{p}_2$,
    allora $\mathbf{q}$ diventa
    il baricentro del triangolo



48

Triangolo come luogo di punti

- Dimostrazione dell'esistenza e unicità delle coord. bari.(traccia):



  - ⇒ Estendi il segmento da $\mathbf{p}_2$ a $\mathbf{q}$, fino ad incontrare $\mathbf{q}_1$ sul lato opposto.
  - ⇒ $\mathbf{q}_1$ è nel segmento con estremi $\mathbf{p}_0$ e $\mathbf{p}_1$
    ⇒ $\mathbf{q}_1 = k_0\ \mathbf{p}_0 + k_1\ \mathbf{p}_1, \qquad k_0 + k_1 = 1$
  - ⇒ $\mathbf{q}$ è nel segmento con estremi $\mathbf{p}_2$ e $\mathbf{q}_1$
    ⇒ $\mathbf{q} = h_0\ \mathbf{p}_2 + h_1\ \mathbf{q}_1 \quad , \qquad h_0 + h_1 = 1$
  - ⇒ Sostituendo…

49

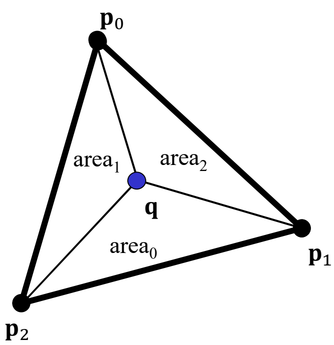
Coordinate baricentriche in un triangolo

- Problema:
  - ⇒ dato un triangolo $\mathbf{T}$ con vertici nei punti 3D $\mathbf{p}_0$, $\mathbf{p}_1$, $\mathbf{p}_2$ e un punto $\mathbf{q} \in \mathbf{T}$ trovare le coordinate baricentriche di $\mathbf{q}$ in $\mathbf{T}$?

$$\mathbf{q} = k_0\ \mathbf{p}_0 + k_1\ \mathbf{p}_1 + k_2\ \mathbf{p}_2$$

$$\text{area}_{\text{TOT}} = \text{area}_0 + \text{area}_1 + \text{area}_2$$

$$k_0 = \text{area}_0 \,/\, \text{area}_{\text{TOT}}$$
$$k_1 = \text{area}_1 \,/\, \text{area}_{\text{TOT}}$$
$$k_2 = \text{area}_2 \,/\, \text{area}_{\text{TOT}}$$

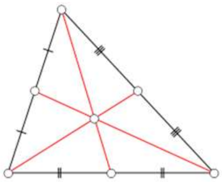


- Soluzione:
  - ⇒ $\mathbf{q}$ spezza $\mathbf{T}$ in tre sotto-triangoli. L'area di ciascun sotto-triangolo (diviso l'area totale di $\mathbf{T}$) è la coordinata baricentrica relativa all'estremo OPPOSTO (verifica con delle prove)

50

Coordiante baricentriche: esercizi

- ✓ Dato un triangolo di vertici $\mathbf{p}_0$,$\mathbf{p}_1$, $\mathbf{p}_2$
quali sono le coordinate baricentriche di…
  - ⇒ il punto $\mathbf{p}_1$
  - ⇒ un punto a metà del lato fra $\mathbf{p}_0$ e $\mathbf{p}_1$
  - ⇒ il baricentro del triangolo
detto anche centroide del triangolo



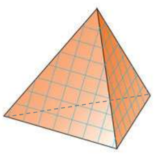
Nota: il baricentro di un triangolo è l'intersezione delle tre mediane e seca ogni mediana ad 1/3 della sua lunghezza

  - ⇒ un punto nel segmento fra $\mathbf{p}_0$ e $\mathbf{p}_1$
che dista da $\mathbf{p}_0$ il triplo di quanto dista da $\mathbf{p}_1$

51

Oltre a N = 3…

- ✓ Le interpolazioni fra 2 punti (in 2D o 3D) formano un **segmento**
  - ⇒ i 2 punti sono i suoi estremi
- ✓ Le interpolazioni fra 3 punti (in 2D o 3D) formano un **triangolo**
  - ⇒ i 3 punti sono i suoi vertici
- ✓ Le interpolazioni fra 4 punti (in 3D) formano un **tetraedro**
  - ⇒ i 4 punti sono i suoi vertici



Tetraedro = piramide a base triangolare
un solido delimitato da 4 triangoli

  - ⇒ la cosa è generalizzabile a dimensioni maggiori ma non ci interessa
- ✓ Per questo, insiemi di segmenti (linee spezzate),
triangoli (mesh triangolari),
o tetraedri (mesh volumetriche tetraedrali – vedi poi)
sono detti **complessi simpliciali**

52