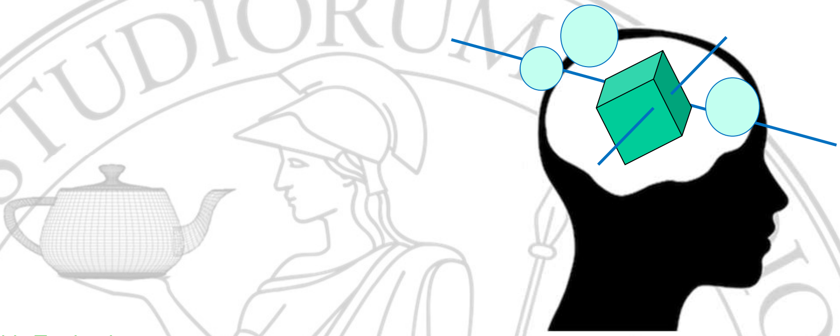
Marco Tarini - Computer Graphics 2021/2022
Università degli Studi di Milano

Vector and Point algebra part 4: prodotto cross



Possible Textbook:
"Mathematics for 3D Game Programming and Computer Graphics, Third Edition"
Sec 2.3

77

Prodotto Cross

✓ Da due vettori a vettore

$$\vec{v} \times \vec{w} = \begin{pmatrix} v_x \\ v_y \\ v_z \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} w_x \\ w_y \\ w_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} v_y\, w_z - v_z\, w_y \\ v_z\, w_x - v_x\, w_z \\ v_x\, w_y - v_y\, w_x \end{pmatrix}$$

✓ Detto anche:

⇒ Prodotto cross (perché si scrive con la crocetta)

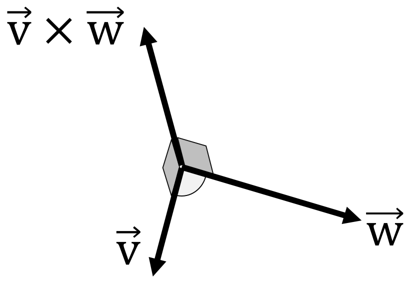
⇒ Prodotto vettoriale (perché restituisce uno vettore)

✓ Nel codice (librerie, linguaggi…) lo si può trovare scritto come: `cross(v,w)` `v^w` `v%w`

✓ E' definito solo in $\mathbb{R}^3$!

78

Prodotto cross e ortogonalità

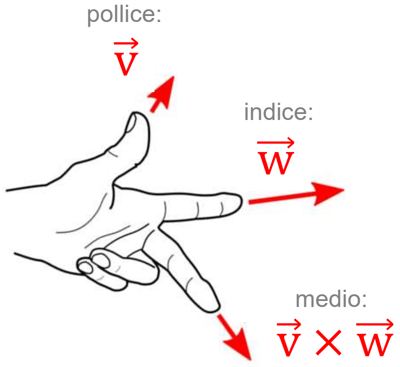


- ✓ Il prodotto cross fra $\vec{v}$ e $\vec{w}$ è sempre ortogonale sia a $\vec{v}$ che a $\vec{w}$
  - ⇒Verificare, calcolando il dot fra $\vec{v} \times \vec{w}$ e $\vec{v}$, oppure $\vec{w}$
- ✓ Prodotto cross = operazione per generare un vettore ortogonale a due vettore dati

79

Verso del prodotto cross

- ✓ Un vettore ortogonale a due vettori (cioè al piano passante per quei due vettori) può assumere due versi opposti.
- ✓ **In quale dei due versi sarà orientato il cross?**
- ✓ Dipende dall'ordine degli operandi!
- ✓ NB: Bisogna applicare la stessa mano usata per *immaginare* gli assi del sistema di riferimento usato per esprimere i vettori



81

Prodotto cross: alcune proprietà

- ✓ Non commuta, anzi è anticommutativo:

$$\vec{v} \times \vec{w} = -\,\vec{w} \times \vec{v}$$

- ✓ E' lineare, cioè
  - ⇒ Distribuisce con la scalatura:

$$k\,(\vec{v} \times \vec{w}) = (k\,\vec{v}) \times \vec{w} = \vec{v} \times (k\vec{w})$$

  - ⇒ Distribuisce con la somma vettoriale:

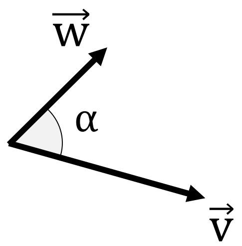
$$\vec{w} \times (\vec{u} + \vec{v}) = \vec{w} \times \vec{u} + \vec{w} \times \vec{v}$$

- ✓ Per tutti i vettori:

$$\vec{v} \times \vec{v} = \vec{0}$$

82

Lunghezza del prodotto cross

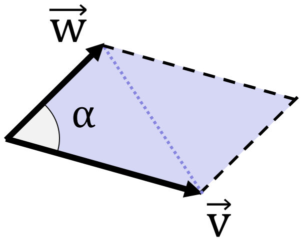


$$\|\vec{v} \times \vec{w}\| = \|\vec{v}\| \ \|\vec{w}\| \,|\sin(\alpha)|$$

se $\hat{v}$ e $\hat{w}$ sono unitari: $\|\hat{v} \times \hat{w}\| = |\sin(\alpha)|$

83

Lunghezza del prodotto cross



$$\|\vec{v} \times \vec{w}\| = \|\vec{v}\| \ \ \|\vec{w}\| \, |\sin(\alpha)|$$

Nota: questa formula
è anche l'area del parallelogramma,
avente per lati $\vec{v}$ e $\vec{w}$
cioè la *doppia area* del triangolo
avente quei due lati.

84

Prodotto cross, ortogonalità e allineamento

- ✓ Se $\vec{v}$ oppure $\vec{w}$ è degenere (vettori nulli) allora $\vec{v} \times \vec{w}$ è degenere (vettore nullo)
- ✓ Altrimenti:
  - $\Rightarrow$ $\|\vec{v} \times \vec{w}\| = 0$ sse i due vettori sono allineati
    (sono nella stessa direz, o in direz opposte)
- ✓ Siano $\hat{v}$ e $\hat{w}$ due vettori unitari. Allora
  - $\Rightarrow$ $\hat{v} \times \hat{w}$ è unitario sse $\hat{v}$ e $\hat{w}$ sono ortogonali
  - $\Rightarrow$ $\hat{v} \times \hat{w}$ è nullo sse $\hat{v}$ e $\hat{w}$ sono coincidenti $\hat{v} = \hat{w}$
    oppure opposti $\hat{v} = -\hat{w}$

85