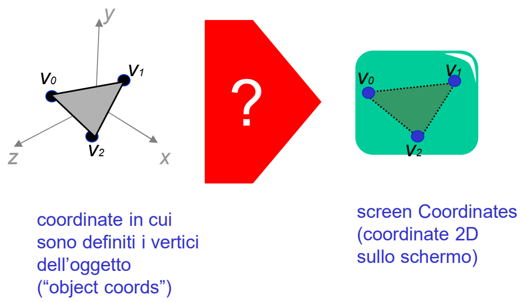
Marco Tarini - Computer Graphics 2022/2023
Università degli Studi di Milano

trasformazioni spaziali

1

Fase per vertice (Transform)

✓ Per ogni vertice di un modello 3D:

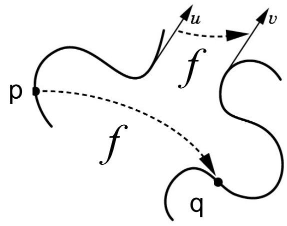


- Si tratta di una "trasformazione spaziale"
- Occupiamoci dunque di "trasformazioni spaziali"

3

Trasformazioni spaziali

- ✓ Funzioni che
  - ⇒ prendono un punto / vettore
  - ⇒ lo mappano in un altro punto / vettore



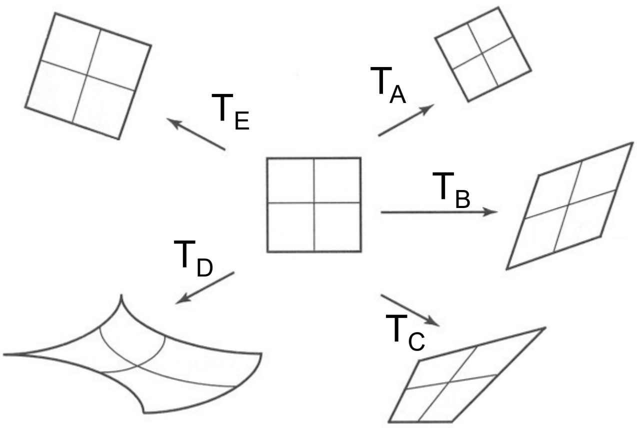
$q = f(p)$
$v = f(u)$

Trasformando tutti i punti / i vettori nella rappresentazione di un modello 3D, (come: le posizioni dei vertici di una mesh, i punti di controllo di una superficie parametrica, la mesh di controllo di una sup di suddivisione…) trasfrormo spazialmente l'oggetto rappresentato

Se l'input è un punto, allora l'output è un punto. Se l'input è un vettore, allora l'output è un vettore

4

Trasformazioni spaziali: in generale

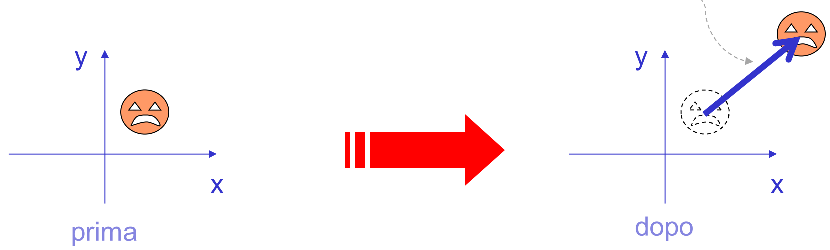


Vediamo alcuni semplici esempi

5

Esempio: Trasformazione di **Traslazione**

$$f\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} + \underbrace{\begin{pmatrix} \alpha_x \\ \alpha_y \\ \alpha_z \end{pmatrix}}_{\text{vettore di traslazione}} = \begin{pmatrix} x+\alpha_x \\ y+\alpha_y \\ z+\alpha_z \end{pmatrix}$$



6

Esempio: Trasformazione di **Traslazione**

✓ Osservazioni:

⇒ i punti vengono traslati

- es: le posizioni dei vertici della mesh

⇒ ma i vettori devono rimanere invariati

- es: le normali alla superficie
  la direzione: «da che parte guarda la faccia»
  il vettore «distanza fra gli occhi»

  non subiscono cambiamenti dopo la traslazione

$$f\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x+\alpha_x \\ y+\alpha_y \\ z+\alpha_z \end{pmatrix}$$

per punti

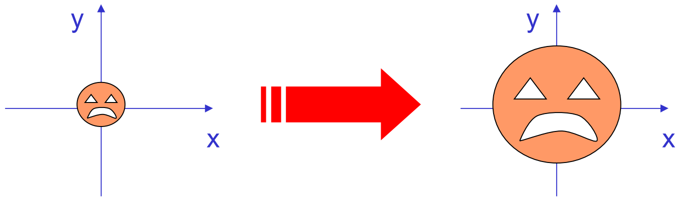
$$f\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

per vettori

7

Altro Esempio: Trasformazione di **Scalatura** (uniforme)

$$f\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \gamma \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \gamma \cdot x \\ \gamma \cdot y \\ \gamma \cdot z \end{pmatrix}$$



8

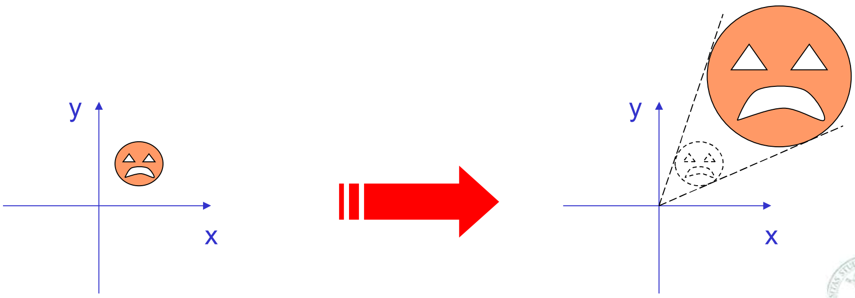
Esempio: trasformazione di **scalatura** (uniforme)

nota: stesso effetto su punti e vettori

(es: il vettore “distanza fra gli occhi” viene scalato)

nota: applicata ai punti

"scala" anche la distanza dall'origine



9

Esempio: trasformazione di **scalatura** uniforme

✓ Detta «**uniforme**» o «**isotropica**»
perché applica lo stesso rapporto di scala
a tutte e tre le coordinate

⇒ quindi i vettori vengono scalati di una stessa quantità, indipendentemente dalla loro direzione

⇒ vale non solo per vettori allineati all'asse X, Y o Z, ma anche per vettori orientati in qualsiasi direzione

⇒ Terminologia (in qualsiasi contesto):

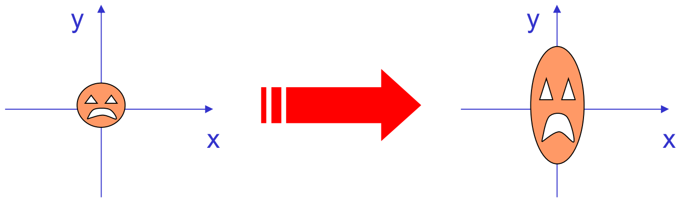
- Invarianza rispetto alla direzione = «**isotropia** »
- Dipendenza dalla direzione = «**anisotropia** »

10

Esempio: trasformazione di **scalatura** (generale)

$$f\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \gamma_x \\ \gamma_y \\ \gamma_z \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \gamma_x \cdot x \\ \gamma_y \cdot y \\ \gamma_z \cdot z \end{pmatrix}$$

prodotto **componente per componente**
"component-wise product"
(non un'operazione canonica)



11

Trasformazione di Scalatura

- Osservazioni:
  - ⇒ Si applica tanto a punti che a vettori
    - (es: se ingrandisco un dinosauro – tutti i punti che lo definiscono, allora ingrandisco anche il vettore che connette la sua coda alla sua testa)
  - ⇒ Fattori di scala inferiori a 1 avvicinano i punti al origine del sistema di riferimento
  - ⇒ Fattori di scala maggiori di 1 lo allontanano
  - ⇒ L'unico punto che viene mappato su se stesso è l'origine

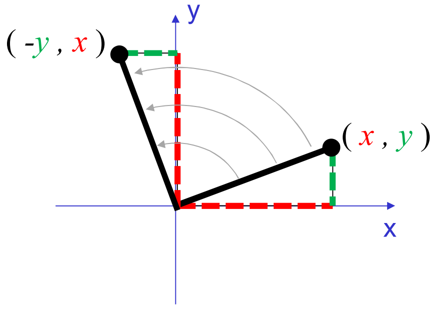
12

Trasformazione di Scalatura: terminologia

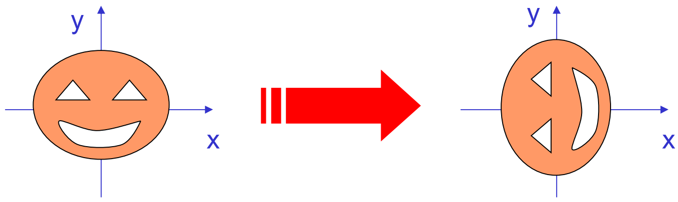
- Se $s_x = s_y = s_z$ le proporzioni dell'oggetto sono mantenute.
  La scalatura viene detta
  - ⇒ uniforme (*x, y* e *z* sono soggetti a fattori uniformi)
  - ⇒ o conformale (mantiene la «forma»)
  - ⇒ o isotropica («qualsiasi direzione viene trattata nello stesso modo»)
    - e non solo i vettori lungo gli assi x, y, e z subiscono un allungamento di s_x, ma anche quelli in qualsiasi altra direzione obliqua (verificare!)
- Altrimenti, le proporzioni **non** sono mantenute.
  La scalatura viene detta
  - ⇒ non uniforme
  - ⇒ o non conformale (non mantiene la forma (delle mesh, etc), deforma)
  - ⇒ o anisotropica («dipende dalla direzione» (del vettore trasformato))

13

Esempio in 2D: trasf. di **rotazione di 90 gradi senso antiorario**

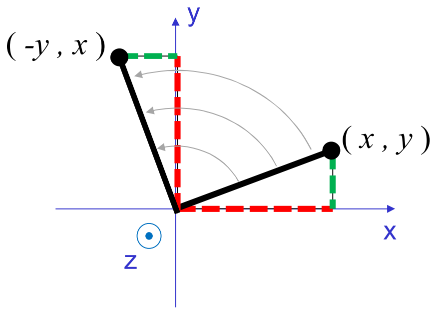


$$f\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -y \\ x \end{pmatrix}$$

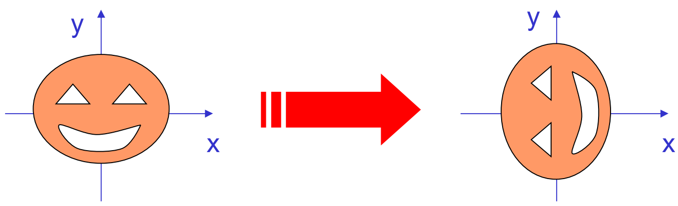


14

In 3D: trasf. di **rotazione di 90 gradi attorno all'asse delle z**

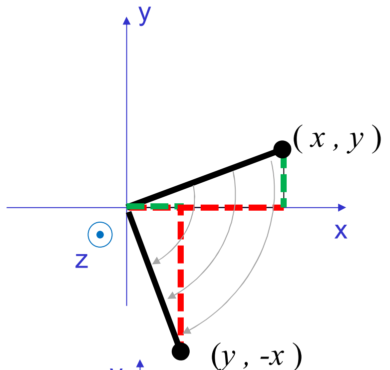


$$f\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -y \\ x \\ z \end{pmatrix}$$

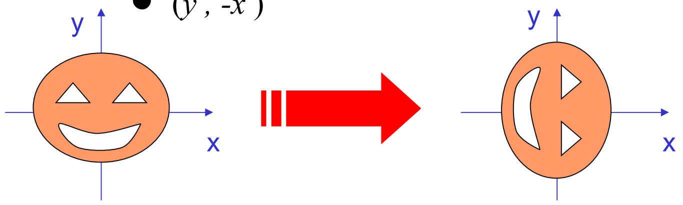


15

Esempio in 2D: trasf. di **rotazione di 90 gradi senso orario**



$$f\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y \\ -x \\ z \end{pmatrix}$$



16

Rappresentazione di punti e vettori in coordinate **omogenee**

Punti:

$$\mathbf{p} = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ 1 \end{bmatrix}$$

1 →

Vettori:

$$\vec{v} = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ 0 \end{bmatrix}$$

0 →

17

Rappresentazione di punti e vettori in coordinate **omogenee**

- ✓ Un **punto** di **coordinate cartesiane** (x, y, z)
  è rappresentato
  in **coordinate omogenee** come $(x, y, z, \mathbf{1})$
- ✓ Un **vettore** di **coordinate cartesiane** (x, y, z)
  è rappresentato
  in **coordinate omogenee** come $(x, y, z, \mathbf{0})$
- ✓ La coordinata affine viene spesso denotata dalla lettera w
- ✓ Nota: (da verificare!)
  questo è coerente con l'algebra di punti e vettori :
  punto – punto = vettore
  punto + vettore = punto

18

Trasformazioni come moltiplicazioni per matrici

- ✓ Esprimendo punti e vettori in coordinate omogenee (in un vettore colonna), possiamo esprimere le trasformazioni viste come una moltiplicazione di una matrice 4x4 M
  - ⇒M è detta la matrice di trasformazione
  - ⇒Questo varrà anche per tutte
    le altre trasformazioni che vedremo
  - ⇒Una trasformazione esprimibile in questo modo è detta «affine»

20

Trasformazioni Affini

✓ Quelle che posso esprimere come moltiplicazione con matrice 4x4 :

$$f\begin{pmatrix}\gamma_1\\\gamma_2\\\gamma_3\\1\end{pmatrix}=\begin{bmatrix}\alpha_{11}&\alpha_{12}&\alpha_{13}&\alpha_{14}\\\alpha_{21}&\alpha_{22}&\alpha_{23}&\alpha_{24}\\\alpha_{31}&\alpha_{32}&\alpha_{33}&\alpha_{34}\\0&0&0&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\gamma_1\\\gamma_2\\\gamma_3\\1\end{bmatrix}=\begin{pmatrix}\delta_1\\\delta_2\\\delta_3\\1\end{pmatrix}$$

sempre

punto di partenza in coordinate affini

punto di arrivo in coordinate affini

21

Trasformazioni Affini

✓ Quelle che posso esprimere come moltiplicazione con matrice 4x4 :

per i vettori, conta solo questo

$$f\begin{pmatrix}\gamma_1\\\gamma_2\\\gamma_3\\\mathbf{0}\end{pmatrix}=\begin{bmatrix}\alpha_{11}&\alpha_{12}&\alpha_{13}&\alpha_{14}\\\alpha_{21}&\alpha_{22}&\alpha_{23}&\alpha_{24}\\\alpha_{31}&\alpha_{32}&\alpha_{33}&\alpha_{34}\\0&0&0&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\gamma_1\\\gamma_2\\\gamma_3\\\mathbf{0}\end{bmatrix}=\begin{pmatrix}\delta_1\\\delta_2\\\delta_3\\\mathbf{0}\end{pmatrix}$$

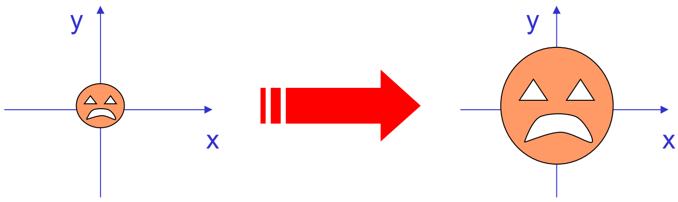
sempre

vettore di partenza in coordinate affini

vettore di arrive in coordinate affini

22

Matrice di trasformazione: scaling isotropico



$$f\begin{pmatrix}x\\y\\z\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\gamma\ x\\\gamma\ y\\\gamma\ z\\1\end{pmatrix}\qquad \begin{bmatrix}\gamma & 0 & 0 & 0\\0 & \gamma & 0 & 0\\0 & 0 & \gamma & 0\\0 & 0 & 0 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x\\y\\z\\1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\gamma\ x\\\gamma\ y\\\gamma\ z\\1\end{bmatrix}$$

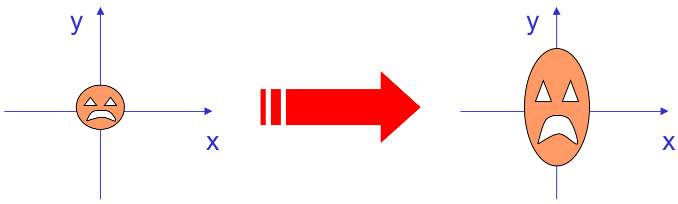
$\mathbf{S}_\gamma$

matrice di scaling isotropico

Cosa succede se la applico $\mathbf{S}_\gamma$ ad un vettore?

23

Matrice di trasformazione: scaling anisotropico



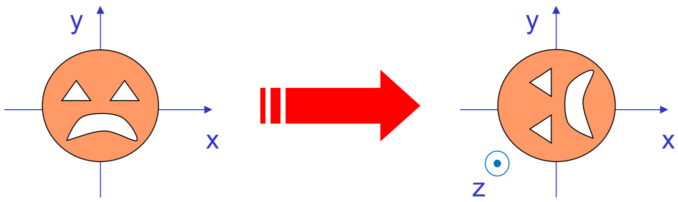
$$f\begin{pmatrix}x\\y\\z\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\gamma_x\ x\\\gamma_y\ y\\\gamma_z\ z\\1\end{pmatrix}\qquad \begin{bmatrix}\gamma_x & 0 & 0 & 0\\0 & \gamma_y & 0 & 0\\0 & 0 & \gamma_z & 0\\0 & 0 & 0 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x\\y\\z\\1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\gamma_x\ x\\\gamma_y\ y\\\gamma_z\ z\\1\end{bmatrix}$$

$\mathbf{S}_{\gamma_x,\gamma_y,\gamma_z}$

matrice di scaling anisotropico

25

Matrice di trasformazione: rotazione attorno all'asse delle Z



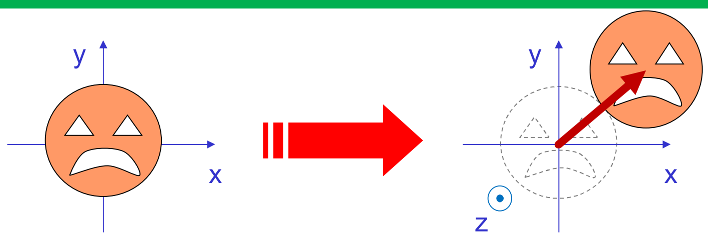
$$f\begin{pmatrix}x\\y\\z\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-y\\x\\z\\1\end{pmatrix} \qquad \begin{bmatrix}0&-1&0&0\\1&0&0&0\\0&0&1&0\\0&0&0&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x\\y\\z\\1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-y\\x\\z\\1\end{bmatrix}$$

$\mathbf{R}_{z,90°}$

matrice di rotazione
di 90° attorno all'asse delle Z

26

Matrice di trasformazione: traslazione



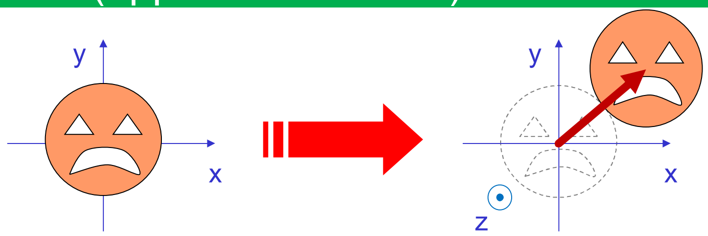
$$f\begin{pmatrix}x\\y\\z\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}x+t_x\\y+t_y\\z+t_z\\1\end{pmatrix} \qquad \begin{bmatrix}1&0&0&t_x\\0&1&0&t_y\\0&0&1&t_z\\0&0&0&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x\\y\\z\\1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}x+t_x\\y+t_y\\z+t_z\\1\end{bmatrix}$$

$\mathbf{T}_{t_x,t_y,t_z}$

matrice di traslazione
del vettore $\mathbf{t} = (t_x, t_z, t_z)$

28

Matrice di trasformazione: traslazione (applicate ai vettori)



$$f\begin{pmatrix}x\\y\\z\\0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}x\\y\\z\\0\end{pmatrix} \qquad \begin{bmatrix}1&0&0&t_x\\0&1&0&t_y\\0&0&1&t_z\\0&0&0&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x\\y\\z\\0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}x\\y\\z\\0\end{bmatrix}$$

la stessa matrice applicata ad un **vettore** lo lascia invariato (come ci aspettiamo da una traslazione)

$\mathbf{T}_{t_x,t_y,t_z}$

matrice di traslazione del vettore $\mathbf{t}=(t_x,t_y,t_z)$

29

Matrice di trasformazione: traslazione

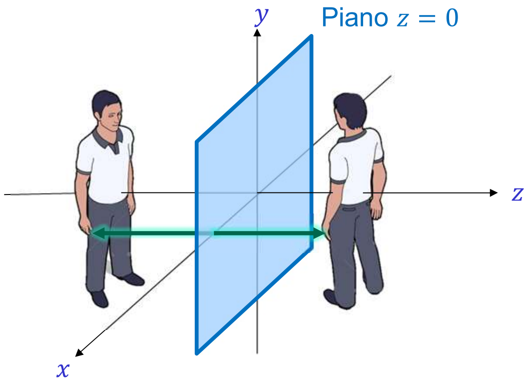
cosa succede quando la applico ad un *vettore* ?

$$f\begin{pmatrix}x\\y\\z\\\mathbf{0}\end{pmatrix}=\begin{bmatrix}1&0&0&\alpha_x\\0&1&0&\alpha_y\\0&0&1&\alpha_z\\0&0&0&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x\\y\\z\\\mathbf{0}\end{bmatrix}=\begin{pmatrix}x\\y\\z\\\mathbf{0}\end{pmatrix}$$

coerentemente con il comportamento atteso, il vettore sottoposto alla traslazione rimane invariato

30

Matrice di simmetria speculare (planare)



$$f\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ -z \end{pmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x \\ y \\ -z \\ 1 \end{bmatrix}$$

31

Sommario: esempi di trasformazioni affini espresse attraveso le loro matrici 4x4

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & t_x \\ 0 & 1 & 0 & t_y \\ 0 & 0 & 1 & t_z \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$\mathbf{T}_{t_x,t_y,t_z}$

matrice di Traslazione
del vettore $\mathbf{t} = (t_x, t_y, t_z)$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$\mathbf{M}_z$

matrice di simmetria (Mirroring)
del piano $z = 0$

$$\begin{bmatrix} \gamma_x & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \gamma_y & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \gamma_z & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$\mathbf{S}_{\gamma_x,\gamma_y,\gamma_z}$

matrice di Scaling
anisotropico

$$\begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$\mathbf{R}_{z,90°}$

matrice di Rotazione
di 90° attorno all'asse delle z

32

Trasformazioni Affini (o lineari)

- ✓ Le trasformazioni esprimibili come una moltiplicazione per una matrice M 4x4 al vettore di coordinate omogenee sono dette «affini»
  - ⇒ L'ultima riga della M è sempre 0,0,0,1, in modo che i punti vengano mappati su punti, e i vettori in vettori
- ✓ E' classe di trasformazioni spaziali particolarmente utile in CG
  - ⇒ (quasi) tutte le trasformazioni spaziali che ci interessano appartengono a questa classe
  - ⇒ Al punto che, in CG, «matrice» (4x4) è praticamente sinonimo di «trasformazione» (spaziale)
- ✓ Comprende tutte le trasformazioni che abbiamo visto fin'ora
  - ⇒ traslazione, scalature uniformi e non, rotazione di 90 gradi attorno a Z, ribaltamenti…

  e altre, che vedremo la prossima volta
  - ⇒ Rotazioni in generale, shearing…

33

Trasformazioni Affini (o lineari)

- ✓ Le caratteristiche spaziali di una trasformazione si riflettono nelle caratteristiche matematiche della matrice corrispondente.
- ✓ Ad esempio, il **determinante** della matrice ha una interpretazione geometrica:
  è il fattore di scala dei volumi della trasformazione
  - ⇒ Se prendo un modello 3D di una bottiglia da 2L e gli applico una trasformazione M (cioè trasformo tutti i suoi vertici), la bottiglia risultante sarà avrà una capienza 2·det(M) litri
  - ⇒ Se il determinante è negativo, l'oggetto si «ribalta» specularmente (le cose in *senso orario* diventano antiorario, le scritte disegnate sopra si leggeranno al contrario, etc
  - ⇒ Esercizio: verificare, trovando il determinante delle matrici viste fin'ora
- ✓ Il vantaggio principale di questa rappresentazione delle trasformazioni spaziale consiste nella loro componizione
  - ⇒ Vediamo in che modo

34

Eseguire sequenze di trasformazioni: note

✓ Le trasf affini sono chiuse per composizione.

…infatti…

✓ La moltiplicazione è associativa

$$\mathrm{M_B} \cdot (\mathrm{M_A} \cdot \mathrm{p}) \; = \; (\mathrm{M_B} \cdot \mathrm{M_A}) \cdot \mathrm{p}$$

⇒La matrice $\mathrm{M_A}$ «fa» una data trasf f_A

⇒La matrice $\mathrm{M_B}$ «fa» una data trasf f_B

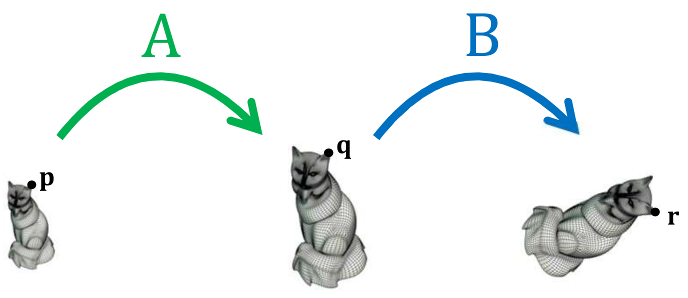
⇒La matrice $(\mathrm{M_B} \cdot \mathrm{M_A})$ «fa» la trasf f_A, seguita da f_B

DOPO PRIMA

✓ Due (oppure n) trasformazioni al prezzo di una!

35

Composizione di trasnformazioni affini

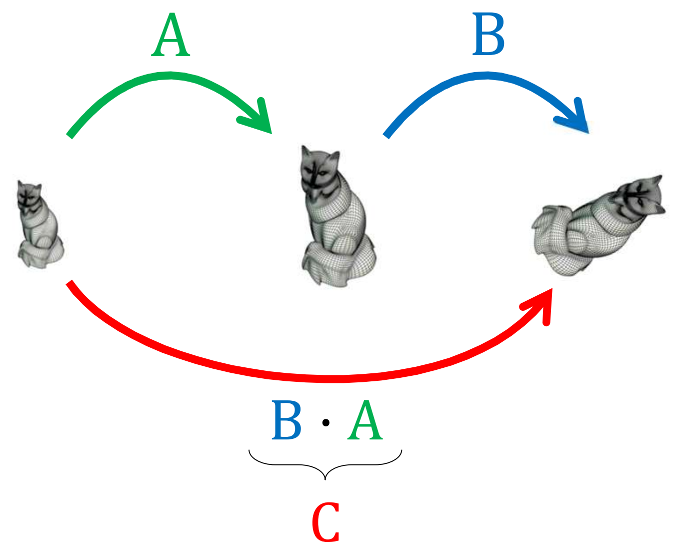


$$\mathbf{q} = \mathrm{A} \cdot \mathbf{p}$$

$$\mathbf{r} = \mathrm{B} \cdot \mathbf{q} \; = \mathrm{B} \cdot (\mathrm{A} \cdot \mathbf{p}) = \overbrace{(\mathrm{B} \cdot \mathrm{A})}^{\mathrm{C}} \, \mathbf{p}$$

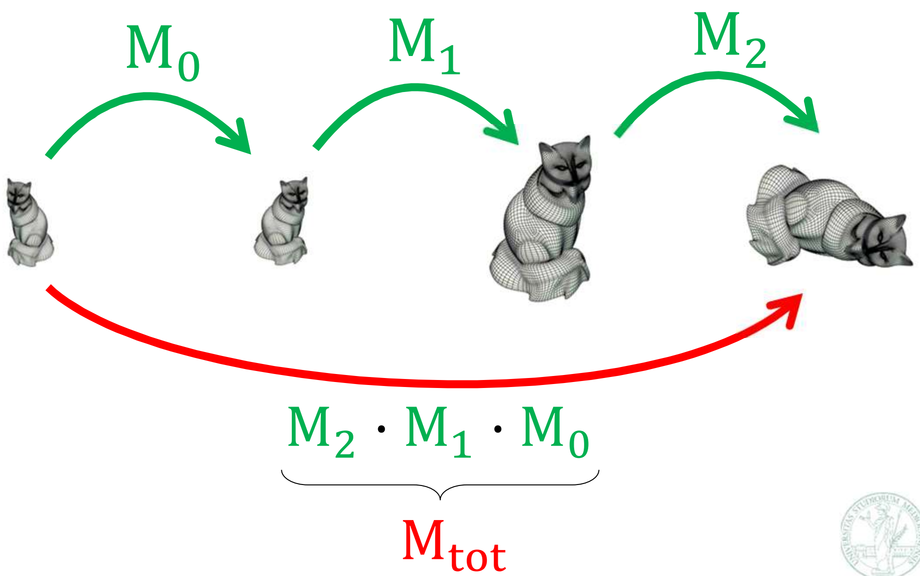
36

Composizione di trasnformazioni affini



37

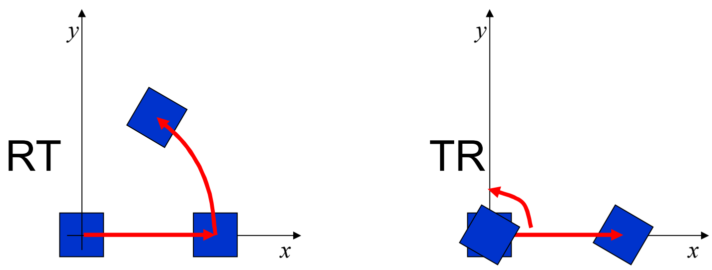
Composizione di trasnformazioni affini



38

Ripasso: moltiplicazione fra matrici 1/2 (cioè composizione di trasformazioni)

- ✓ Associativa: $\mathrm{A}(\mathrm{BC}) = (\mathrm{AB})\mathrm{C}$
- ✓ Ma non commutativa! $\mathrm{AB} \neq \mathrm{BA}$
  - ⇒ previsione:
    determinare il corretto ordine delle trasformazioni non sarà intuitivo



39

Digressione: in 2D: le trasformazioni affini sono matrici 3x3

- ✓ Punti 2D:

$$\begin{bmatrix} * & * & * \\ * & * & * \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x' \\ y' \\ 1 \end{bmatrix}$$

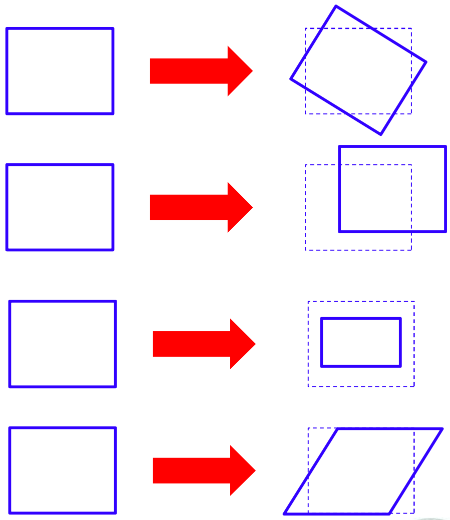
- ✓ Vettori 2D:

$$\begin{bmatrix} * & * & * \\ * & * & * \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x' \\ y' \\ 0 \end{bmatrix}$$

40

Lista completa degli effetti geometrici ottenibili con trasformazioni affini

- ✓ Rotazioni
  - ⇒(qualsiasi)
- ✓ Traslazioni
- ✓ Scalature
  - ⇒uniformi o no
  - ⇒compreso ribaltamenti
- ✓ Shearing



- ✓ … e tutte le composizioni di queste operazioni

41

Trasformazioni spaziali affini: una definizione eqivalente, e una proprietà

- ✓ Sono tutte e sole le funzioni **lineari** , cioè tali che, dati un punto $\mathbf{p}$ vettore $\vec{v}$, $\vec{w}$ e uno scalare k:

$$f(\mathbf{p} + k\vec{v}) = f(\mathbf{p}) + kf(\vec{v})$$

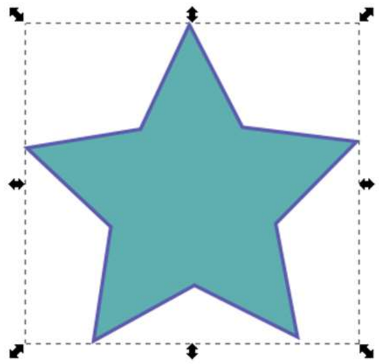
$$f(h\vec{v} + k\vec{w}) = h\,f(\vec{v}) + k\,f(\vec{w})$$

- ⇒ Cioè: trasformare una combinazione lineare di punti (o vettori) (interpolazione compresa) è la stessa cosa di combinare linearmente i punti (o i vettori) trasformati
- ⇒ Questo è cruciale per la nostra applicazione (rendering basato su rasterizzazione), perché significa che…
  … per applicare una trasformazione affine ad un triangolo basta applicarla ai suoi vertici, e poi congiungere i vertici trasformati
  … per applicare una trasformazione ad una spline basta calcolare le trasformazioni dei punti di controllo, e poi usarli per la spline trasformata

42

GUI comuni per specificare trasformazioni affini in 2D (questo esempio: da inkscape)

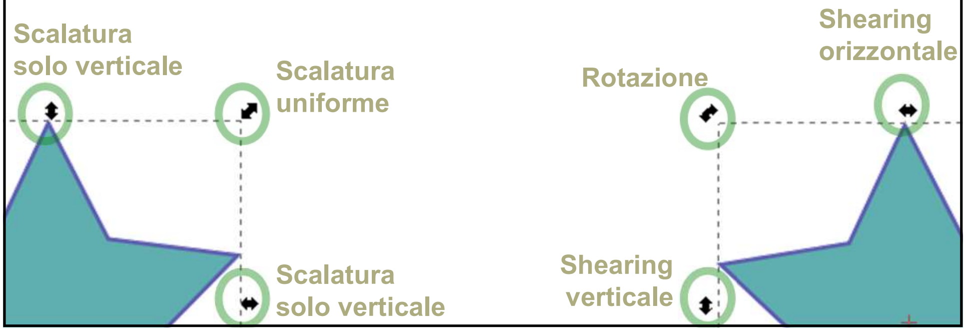
[DEMO]



(più la traslazione con drag-and-drop)
comulando trasformazioni, si possono ottenere tutte le possibili trasf affini in 2D

43

GUI comuni per specificare trasformazioni affini in 2D (questo esempio: da inkscape)



44

Calcolo dell'inversa di una matrice di trasformazione affine

- ✓ Potremmo applicare un algoritmo generico di inversione di matrici 4x4
- ✓ molte delle matrici di trasformazioni utili sono casi particolari che ammettono di derivare in modo logico e semplifcato (ed efficiente) l'inversa
- ✓ Vediamo inversa di: traslazione, scalatura, rotazione, e di composizione di matrici

45

Inversa della matrice di scalatura

matrice di scalatura:

$$\mathbf{S}_{\gamma_x,\gamma_y,\gamma_z} = \begin{bmatrix} \gamma_x & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \gamma_y & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \gamma_z & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

l'inversa è, logicamente:

$$(\mathbf{S}_{\gamma_x,\gamma_y,\gamma_z})^{-1} = \mathbf{S}_{1/\gamma_x,1/\gamma_y,1/\gamma_z} = \begin{bmatrix} 1/\gamma_x & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1/\gamma_y & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1/\gamma_z & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

46

Inversa della matrice di traslazione

matrice di traslazione: $\mathbf{T}(\alpha_x,\alpha_y,\alpha_z)=\begin{bmatrix}1&0&0&\alpha_x\\0&1&0&\alpha_y\\0&0&1&\alpha_z\\0&0&0&1\end{bmatrix}$

l'inversa è, logicamente:

$$\mathbf{T}^{-1}(\alpha_x,\alpha_y,\alpha_z)=\mathbf{T}(-\alpha_x,-\alpha_y,-\alpha_z)=\begin{bmatrix}1&0&0&-\alpha_x\\0&1&0&-\alpha_y\\0&0&1&-\alpha_z\\0&0&0&1\end{bmatrix}$$

47

Inversa di matrice di simmetria speculare

matrice di rotaz di 90° in senso ***antiorario*** attorno all'asse delle z: $\begin{bmatrix}0&-1&0&0\\+1&0&0&0\\0&0&1&0\\0&0&0&1\end{bmatrix}$

l'inversa è, logicamente…

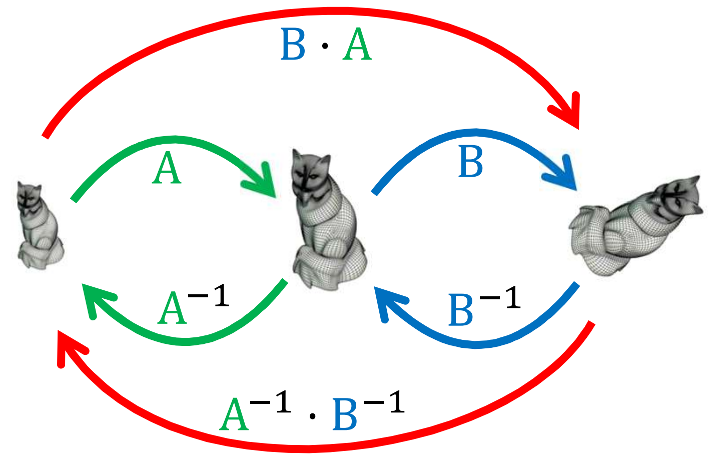
matrice di rotaz di 90° in senso ***orario*** attorno all'asse delle z: $\begin{bmatrix}0&+1&0&0\\-1&0&0&0\\0&0&1&0\\0&0&0&1\end{bmatrix}$

Nota: la matrice inversa è anche la trasposta.
Come vedremo, questo varrà per tutte le matrici di rotazione.

48

Inversa di una composizione di trasformazioni

✓ Attenzione all'inversione: $(B \cdot A)^{-1} = A^{-1} \cdot B^{-1}$

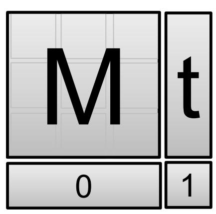


49

La matrice 4x4 corrispondente ad una trasformazione affine: sommario

Questa sottomatrice **M** 3x3 si applica alle coord cartesiane sia dei **punti** che dei **vettori**

Ultima riga: (0,0,0,1)
Così che i **punti** vengano mappati sempre in **punti**, e i **vettori** sempre in **vettori**



Matrice 4x4

Questo vettore **t** si somma al risultato quando trasformo **punti** ma viene annullato (moltiplicato per zero) quando trasformo **vettori**.

50

Alcune caratteristiche numeriche delle matrici 4x4 e loro interpretazione geometrica

- ✓ Matrice inversa = trasformazione inversa
  - ⇒ se esiste (se det ≠ 0)
- ✓ Determinante della matrice 4x4 = (che è anche il determinante della sottomatrice 3x3)
  - ⇒ Moltiplicatore del volume
  - ⇒ Per es, determinante = 0.5: questa matrice riduce i volumi degli oggetti trasformati del 50%
- ✓ Deficit di rango della matrice:
  - ⇒ cioè rango massimo (4) meno rango della matrice
  - ⇒ È la perdita di dimensionalità
  - ⇒ Per es: rango 3 (invece di 4): la trasf. riduce oggetti 3D a oggetti piatti.
  - ⇒ Per es: rango 2 (invece di 4): la trasf. riduce oggetti 3D ad una linea
  - ⇒ Per es: rango 1 (invece di 4): la trasf. riduce oggetti 3D ad un punto
  - ⇒ Se rango < 4: det = 0 (il volume scompare) e la matrice non è invertibile (è «singolare»)

51

Esercizio

- ✓ Comporre (moltiplicare, nell'ordine giusto) una matrice di rotaz di 90 gradi attorno alle z con una matrice di traslazione del vettore (1,2,3) per ottenere la matrice che "ruota-poi-trasla"
  - ⇒ Hai trovato così una matrice di "roto-traslazione"
- ✓ Trovare poi la matrice che ottegno se invece *traslo poi ruoto*
  - ⇒ È la stessa matrice? Come differisce dalla prima?

52