Marco Tarini - Computer Graphics 2022/2023
Università degli Studi di Milano

trasformazioni spaziali 2/2

55

Trasf. di rotazione in 2D generica
(attorno all'origine, di un angolo β **generico**, in senso antiorario)

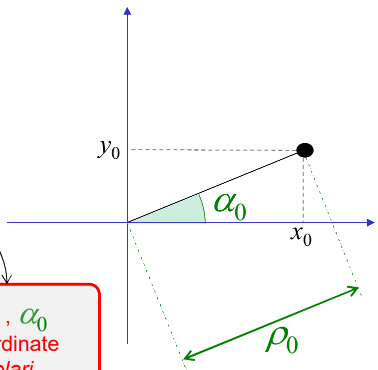
preliminare:coordinate polari
(un diverso modo per
esprimere punti / vettori in 2D)

x_0 , y_0
coordinate
catersiane

$$\rho_0 = \sqrt{x_0^2 + y_0^2}$$
$$\alpha_0 = atan2(\ y_0\ ,\ x_0\ )$$

ρ_0 , α_0
coordinate
polari

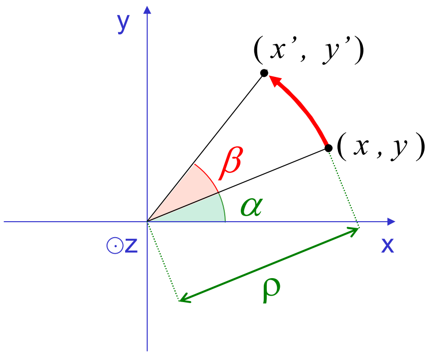
$$x_0 = \rho_0 \cdot \cos(\alpha_0)$$
$$y_0 = \rho_0 \cdot \sin(\alpha_0)$$



56

Trasf. di rotazione in 2D
(attorno all'origine, di un angolo β **generico**, in senso antiorario)

In coordinate polari,
la rotazione sarebbe banale:
l'angolo α incrementa di β,
la distanza ρ rimane invariata



partenza:
$$x = \rho \cos \alpha$$
$$y = \rho \sin \alpha$$

arrivo:
$$x' = \rho \cos(\alpha + \beta) = \rho \cos \alpha \cos \beta - \rho \sin \alpha \sin \beta = x \cos \beta - y \sin \beta$$
$$y' = \rho \sin(\alpha + \beta) = \rho \cos \alpha \sin \beta + \rho \sin \alpha \cos \beta = x \sin \beta + y \cos \beta$$

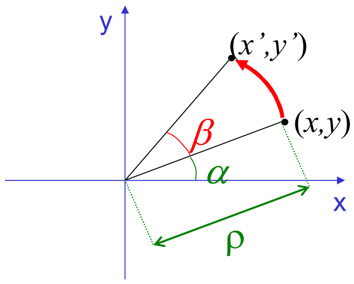
57

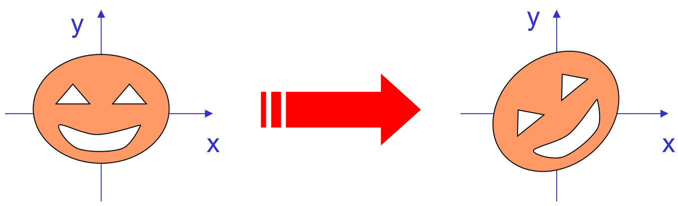
Trasf. di rotazione in 2D
(attorno all'origine, di un angolo β **generico**, in senso antiorario)

Quindi:

$$f\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \cos \beta - y \sin \beta \\ x \sin \beta + y \cos \beta \end{pmatrix}$$

alla fine, il passaggio alle coord polari serve solo per derivare la formula :-) Per applicarla, bastano il valore del seno e coseno dell'angolo di rotazione β



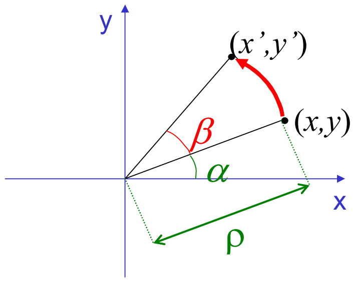


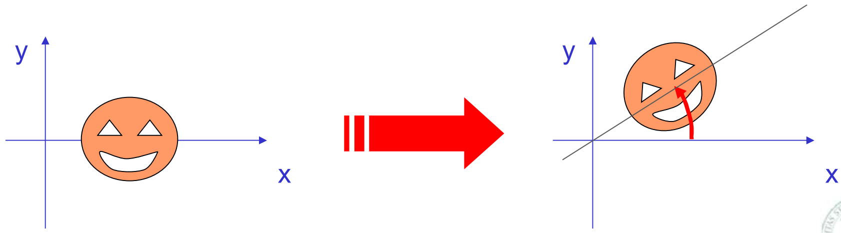
58

Trasf. di rotazione in 2D
(attorno all'origine, di un angolo β **generico,** in senso antiorario)

$$f\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x\cos\beta - y\sin\beta \\ x\sin\beta + y\cos\beta \end{pmatrix}$$

Nota: questa trasformazione
ruota attorno all'origine degli assi
(non certo attorno al centro delle figure)



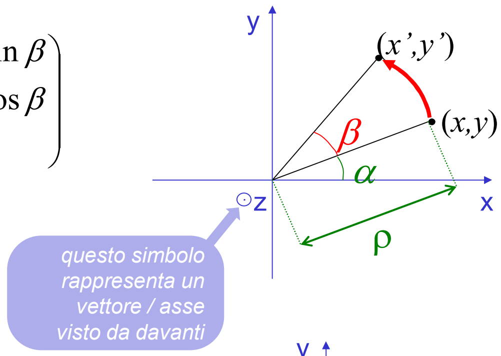


59

Trasf. di rotazione 3D attorno all'asse z
(di un angolo β)

$$f\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x\cos\beta - y\sin\beta \\ x\sin\beta + y\cos\beta \\ z \end{pmatrix}$$

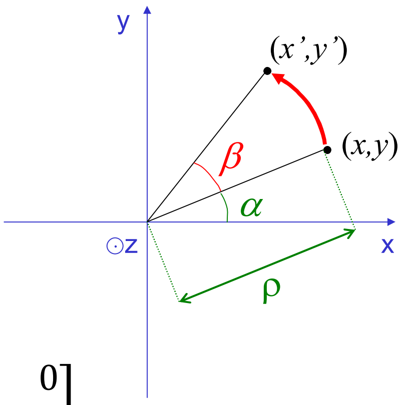
z rimane invariata
solo x e y ruotano



60

Rotazione 3D attorno all'asse z espresso come moltiplicazione con matrice

$$x' = x\cos\beta - y\sin\beta$$
$$y' = x\sin\beta + y\cos\beta$$
$$z' = z$$



$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \\ z' \\ 1 \end{bmatrix} = R_{Z(\beta)} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x\cos\beta - y\sin\beta \\ x\sin\beta + y\cos\beta \\ z \\ 1 \end{bmatrix}$$

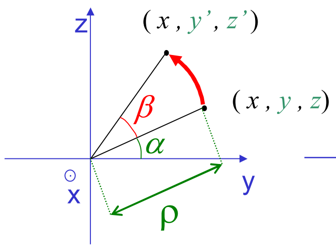
$$R_{Z(\beta)} = \begin{bmatrix} \cos\beta & -\sin\beta & 0 & 0 \\ \sin\beta & \cos\beta & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

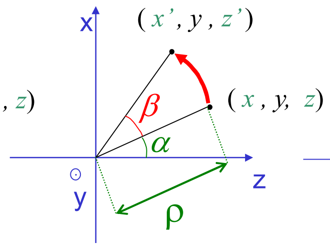
Matrice di rotazione di angolo β attorno all'asse Z

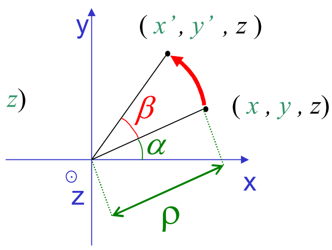
62

Trasf. di rotazione attorno ad uno dei tre assi

Attorno ad ASSE X	Attorno ad ASSE Y	Attorno ad ASSE Z







$$f\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y\cos\beta - z\sin\beta \\ y\sin\beta + z\cos\beta \end{pmatrix} \qquad f\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} z\cos\beta + x\sin\beta \\ y \\ z\sin\beta - x\cos\beta \end{pmatrix} \qquad f\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x\cos\beta - y\sin\beta \\ x\sin\beta + y\cos\beta \\ z \end{pmatrix}$$

63

Matr di Rotazione attorno all'asse x, y, o z

$$R_X(\theta) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\theta & -\sin\theta & 0 \\ 0 & \sin\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$R_Y(\theta) = \begin{bmatrix} \cos\theta & 0 & \sin\theta & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -\sin\theta & 0 & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$R_Z(\theta) = \begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta & 0 & 0 \\ \sin\theta & \cos\theta & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

e le inverse?

$$R_X(\theta)^{-1} = R_X(-\theta) = R_X(\theta)^{\mathrm{T}}$$

(verificare)

64

Rotazioni in 3D: note

- ✓ In 3D,
  bisogna specificare attorno a quale asse ruotare
  - ⇒ oltre che, di quanti gradi, per convenzione sul segno:
    positivo se senso antiorario, nagativo se in senso orario
    (guardando l'asse dalla punta verso la coda)
- ✓ Si applica nello stesso modo ai punti e ai vettori
  - ⇒ la *stessa* funzione viene applicata alle loro coordinate
- ✓ I punti sull'asse vengono mappati su se stessi
  - ⇒ e così, i vettori paralleli all'asse
- ✓ Attenzione: cumulare rotazioni in 3D non commuta!
  - ⇒ Es: ruotare attorno a X di 90° e poi a Y di 90°
    non è la stessa cosa di
    ruotare attorno a Y di 90° e poi a X di 90°

67

Generalizzare a qualsiasi matrice di rotazione

- ✓ Abbiamo visto solo rotazioni attorno ai tre assi X,Y,Z
- ✓ Possiamo però ottenere matrici di rotazioni attorno ad assi *qualsiasi*:
  - ⇒ Le matrici di rotazione attorno ad un asse qualsiasi (anche obliquo) *passante per l'origine* possono essere costruire cumulando in cascata (cioè, moltiplicando le matrici di) tre rotazioni sui tre assi X, Y, Z, con tre angoli opportunamente scelti (non vediamo come scegliere questi angoli)
  - ⇒ Le matrici di rotazione per un asse *non* passante per l'origine possono essere ottenute combinando (moltiplcando) rotazioni e traslazioni. *Vediamo come!*

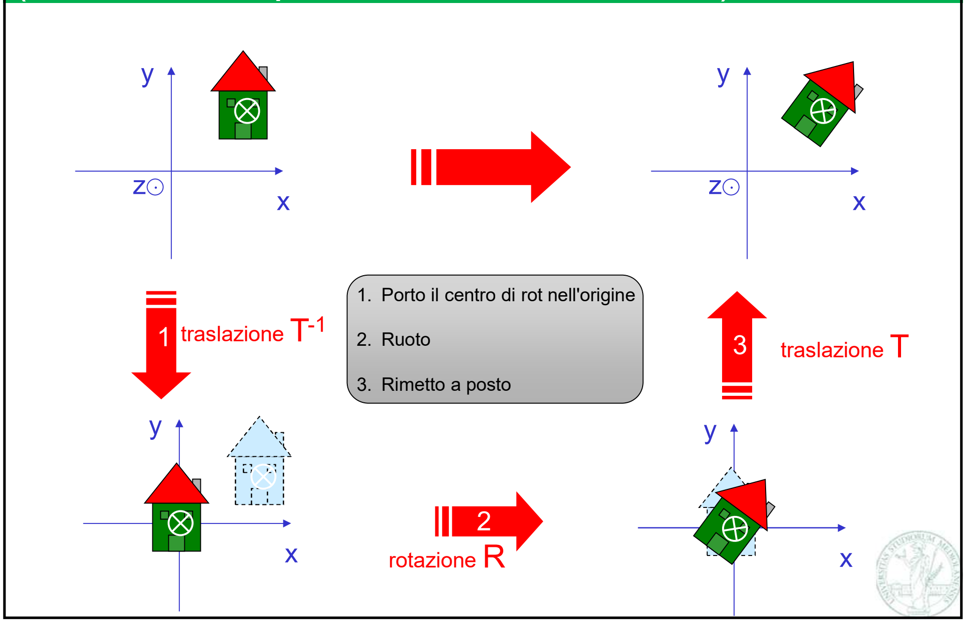
68

Matrici di rotazione

- ✓ Loro inversa: cambiare segno all'angolo $\beta = -\beta$
  $\Longrightarrow$ cambiare il sengo al $\sin\beta$ ($\cos\beta$ rimane invariato)
  $\Longrightarrow$ la matrice si **traspone**
- ✓ L'**inversa** di una matrice di rotazione è la sua **trasposta**
- ✓ Sono dunque matrici «ortonormali» $\mathrm{M} \cdot \mathrm{M}^{\mathrm{T}} = \mathrm{I}$
- ✓ Abbiamo visto solo rotazioni attorno ai tre assi
  - ⇒ Come ottenere matrici attorno ad assi qualsiasi? Passante per l'origine?
- ✓ Tutte le matrici di rotazione con asse qualsiasi (anche obliquo) passante per l'origine le posso costruire cumulando tre rotazioni

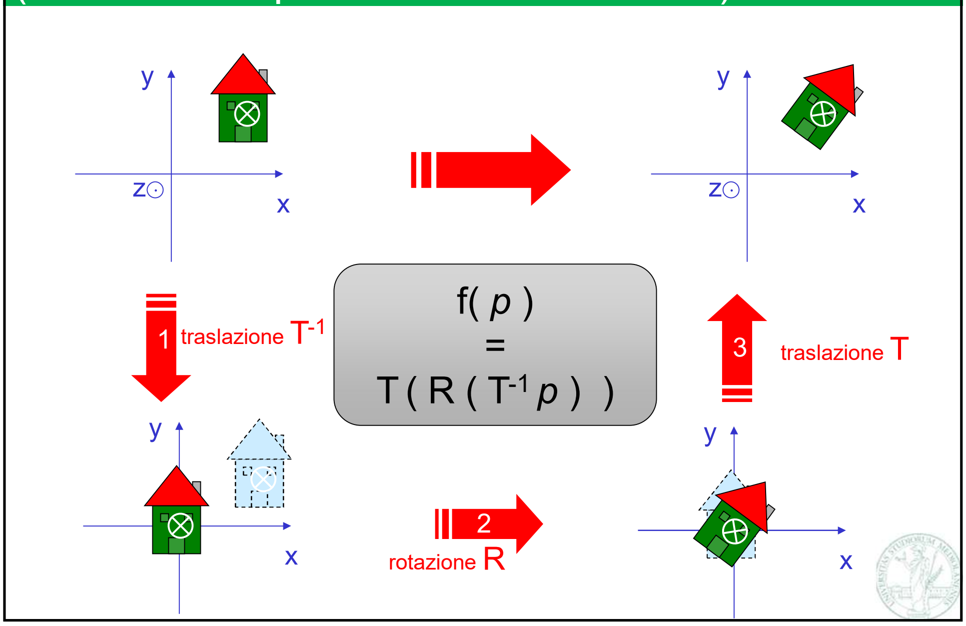
69

Rotazione intorno ad un asse *parallelo* all'asse z (ottenuta componendo trasformazioni)



70

Rotazione intorno ad un asse *parallelo* all'asse z (ottenuta componendo trasformazioni)



71

Rotazione intorno ad un asse *parallelo* all'asse z (ottenuta componendo trasformazioni)

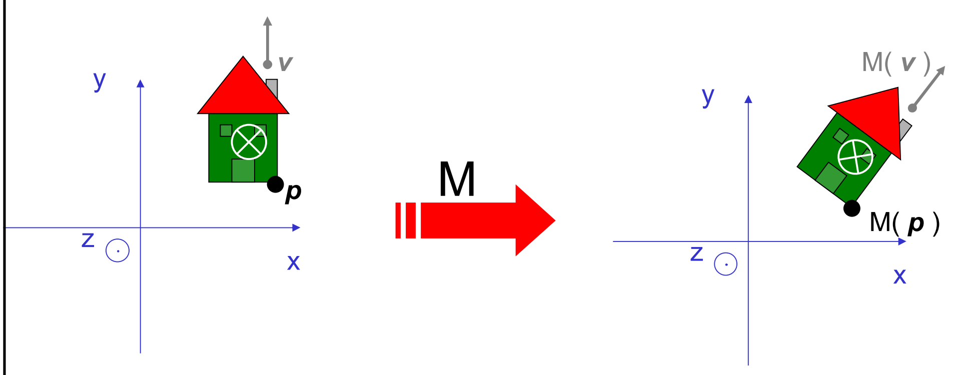
✓ Moltiplicazione matrici (vettori) ha la propretà associativa

$$f(p) = T\,(\,R\,(\,T^{-1}\,p\,)\,)$$
$$= \underbrace{(T\,R\,\,T^{-1})}_{\text{una matrice M 4x4 che fa tutto.}}\,p$$

- considerazioni sull'efficienza
- cosa possiamo dire sulla forma di M ?
- cosa succede se moltiplichiamo un *vettore* per M ?

72

Punti VS vettori

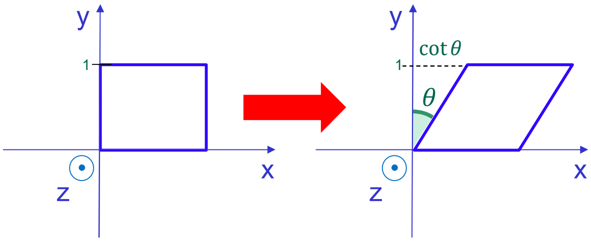


***p* = (* , * , * , 1)** punto all'angolo della casa **(punto)**
v = (* , * , * , 0) velocità vettoriale del fumo **(vettore)**

73

Trasformazione di shearing

✓ Es: spostamento in *x* proporzionale alla pos *y*



$$x' = x + y\cot\theta$$
$$y' = y$$
$$z' = z$$

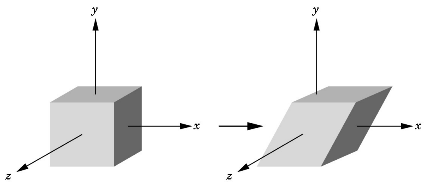
$$H_{xy}(\theta) = \begin{bmatrix} 1 & \cot\theta & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

matrice di shearing
(della x rispetto alla y,
di angolo θ)

77

Trasformazione di shearing

✓ Es: spostamento in *x* proporzionale alla pos *y*



$$x' = x + y\cot\theta$$
$$y' = y$$
$$z' = z$$

$$H_{xy}(\theta) = \begin{bmatrix} 1 & \cot\theta & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

matrice di shearing
(della x rispetto alla y,
di angolo θ)

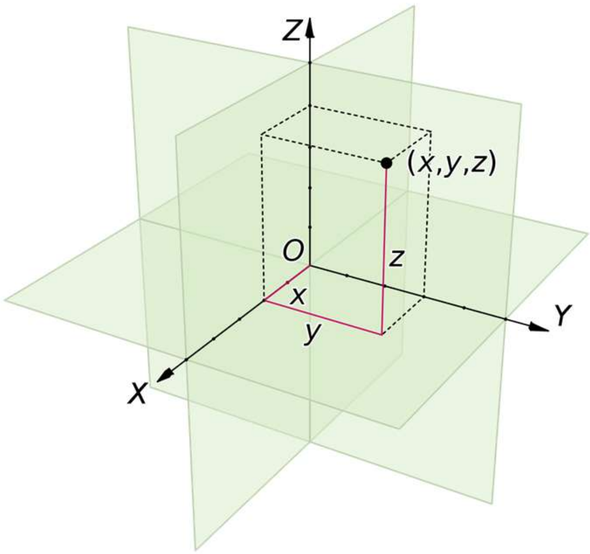
78

Trasformazioni affini come cambi di Sistema di riferimento

- ✓ Fin'ora, abbiamo interpretato le **trasformazioni affini** come operazioni fisiche che vengono **applicate fisicamente ad oggetti** (trasformando i punti e vettori che descrivono)
  - ⇒ Ad esempio, li spostano, li riorientano nello spazio, li ingrandiscono o riducono, li deformano, etc.
- ✓ Vediamo ora una utilissima interpretazione alternativa di cosa sia una trasformazione affine (e cosa significhi applicarle)
  - ⇒ "Applicare una trasformazione affine ad un punto / un vettore può essere vista come la *traduzione* delle coordinate del punto / vettore da un Sistema di Riferimento ad un altro"

81

Ripasso: sistema di riferimento (o anche "spazio") in cui esprimere punti e vettori



82

Sistema di riferimento: note

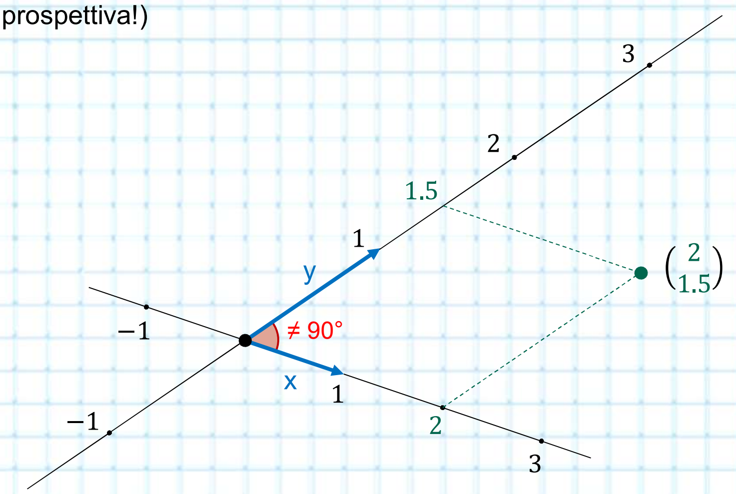
- ✓ Fin'ora, abbiamo tacitamente assunto che il Sistema di riferimento
(usato per esprimere sia punti che vettori)
fosse quello canonico, uno in cui:
  - ⇒Gli assi sono ortogonali fra loro
  - ⇒Gli assi hanno la stessa lunghezza, che è unitaria
  - ⇒L'origine è in (0,0,0)

- ✓ Un Sistema di riferimento in generale può non avere nessuna di queste caratteristiche

83

Un sistema di riferimento non ortogonale (in 2D)

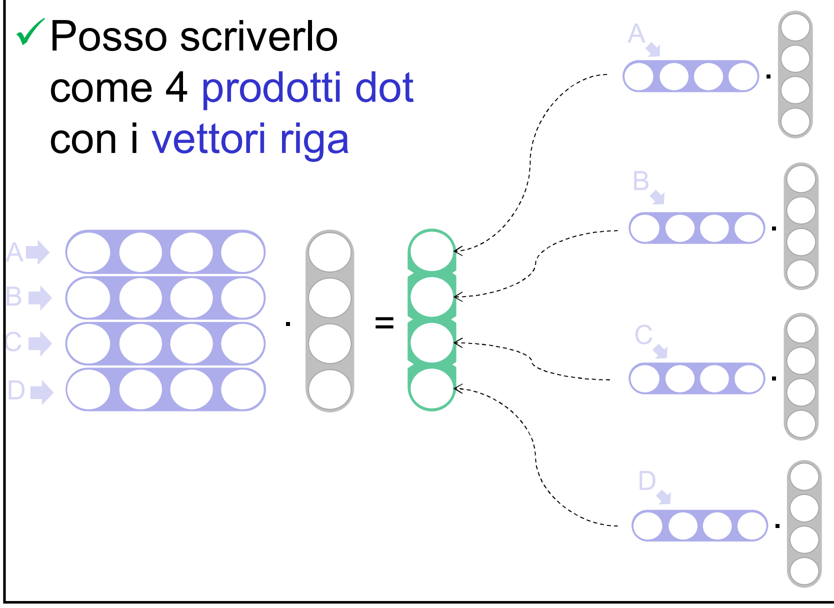
(Questo disegno
non è in prospettiva!)



84

Ripasso/digressione: prodotto Matrice × Vettore («riga per colonna»)

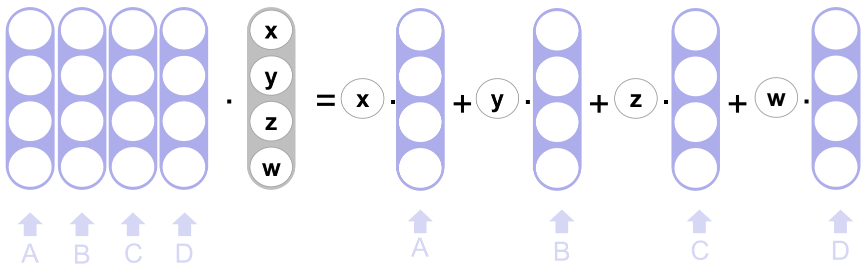
✓ Posso scriverlo come 4 prodotti dot con i vettori riga



85

Ripasso/digressione : prodotto Matrice × Vettore («riga per colonna»)

✓ Ma posso anche scriverlo come: una combinazione lineare dei vettori colonna



86

Sistema di riferimento o reference *frame* (oppure anche: uno *spazio*)

- ✓ Un sistema di riferimento *R* è definito da
  - ⇒ una base vettoriale $\{\vec{a}_x, \vec{a}_y, \vec{a}_z\}$ (gli assi dello spazio)
  - ⇒ un punto di *origine* $\mathbf{p_o}$
- ✓ Posso esprimere (univocamente!) ogni punto $\mathbf{p}$ come:

$$\mathbf{p} = \mathbf{p_o} + x\,\vec{a}_x + y\,\vec{a}_y + z\,\vec{a}_z$$

- ✓ Cioè:

sistema di riferimento R

$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \\ z' \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \vec{a}_x & \vec{a}_y & \vec{a}_z & \mathbf{p_o} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ 1 \end{bmatrix}$$

coordinate *omogenee* di $\mathbf{p}$ nel sistma di riferimento canonico

coordinate *omogenee* di $\mathbf{p}$ nel sistema R

87

Base vettoriale (o spazio vettoriale)

- ✓ Definita da tre vettori asse (linearmente indipendenti)
  - ⇒ $\{\vec{a}_x, \vec{a}_y, \vec{a}_z\}$
- ✓ Posso esprimere (univocamente!) ogni vettore $\vec{v}$ come:

$$\vec{v} = x\,\vec{a}_x + y\,\vec{a}_y + z\,\vec{a}_z$$

- ✓ Cioè:

Base vettoriale B

Non conta

$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \\ z' \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \vec{a}_x & \vec{a}_y & \vec{a}_z & * \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ 0 \end{bmatrix}$$

coordinate *omogenee* di $\vec{v}$ nella base canonica

coordinate *omogenee* di $\vec{v}$ nella base sistema B

88

Base vettoriale (o spazio vettoriale)

- ✓ Definita da tre vettori asse (linearmente indipendenti)
  - $\Rightarrow \{ \vec{a}_x, \vec{a}_y, \vec{a}_z \}$
- ✓ Posso esprimere (univocamente!) ogni vettore $\vec{v}$ come:

$$\vec{v} = x\,\vec{a}_x + y\,\vec{a}_y + z\,\vec{a}_z$$

- ✓ Cioè anche:

$$\underbrace{\begin{bmatrix} x' \\ y' \\ z' \\ 0 \end{bmatrix}}_{\text{coordinate } \textit{omogenee} \text{ di } \vec{v} \text{ nello spazio canonico}} = \overbrace{\begin{bmatrix} \vec{a}_x & \vec{a}_y & \vec{a}_z & \mathbf{p}_o \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}}^{\text{sistema di riferimento R}} \underbrace{\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ 0 \end{bmatrix}}_{\text{coordinate } \textit{omogenee} \text{ di } \vec{v} \text{ nello spazio R}}$$

89

Cambio di Sistema di riferimento (o spazio)

- ✓ ogni trasformazine affine può quindi essere interpretata come un *cambio di sistema di riferimento*

- ✓ e le colonne della matrice descrivono
  - ⇒3 assi
  - ⇒origine

  dello spazio di partenza
  descritte nelle coordinate dello spazio di arrivo

90