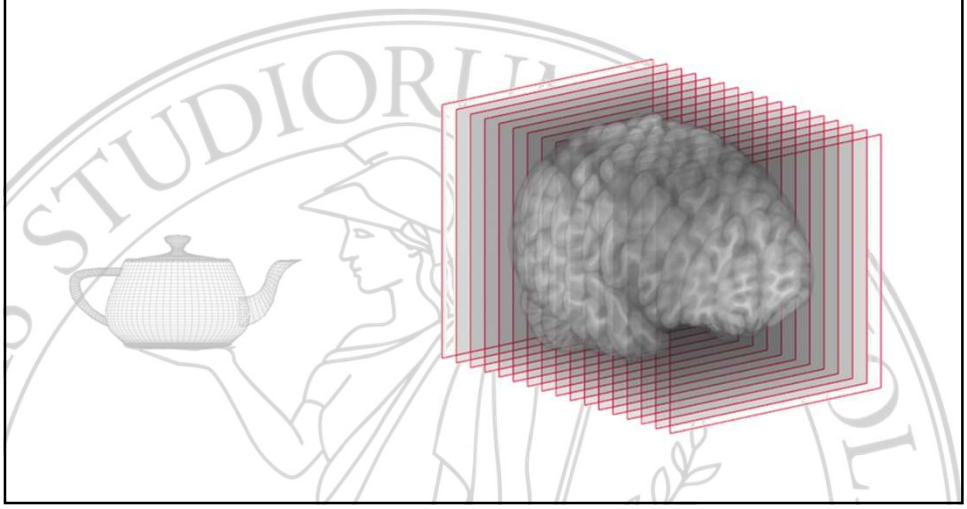
Marco Tarini - Computer Graphics 2023/2024
Università degli Studi di Milano

# Rappresentazioni Volumetriche



1

## Una (imperfetta) categorizzazione dei tipi di modelli digitali 3D

| | | ELEMENTI DISCRETI | | | CONTINUI |
|---|---|---|---|---|---|
| | | regolari *«a griglia»* | semi-regolari o irregolari: elementi simpliciali | semi-regolari o irregolari: elementi non simpliciali | |
| SUPERFICIALI | 2-manifold *«rappresenta una vera superficie»* | **Height Field**<br>**Range Scan** | **Triangle Mesh** | **Polygonal Mesh**<br>**Quad Mesh**<br>**Quad dominant Mesh** | **Subdivision surfaces**<br>**Parametric Surfaces**<br>**(es. B-splines)** |
| | non-manifold *«non rappresenta una sup»* | **Set di Range Scan** | **Point Cloud** | | |
| VOLUMETRICI | (3-manifold) | **Voxelized Volume**<br>**Volumetric Textures** | **Tetra Mesh** | **Hexa Mesh** | **Implicit models**<br>**(es. CSG)** |

2

## Modelli 3D Volumetrici

1. Discreti & irregolari: mesh poliedrali
   ⇒analogo di una mesh poligonale (ma nel volume)
   ⇒insieme di poliedri adiacenti faccia a faccia

2. Discreti & regolari: dataset voxellizati
   ⇒analogo di un immagine rasterizzata, ma in 3D
   ⇒una griglia di voxel

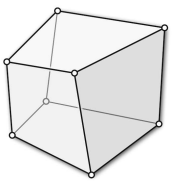
3. Continui: modelli impliciti
   ⇒rappresentazione basata su funzioni volumetriche
   ⇒superficie come luogo di zeri di una funzione

4

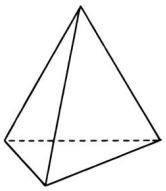
## Mesh poliedrale

✓ Corrispondente volumetrico delle mesh poligonali

✓ Composta da poliedri quali…



esaedro
(o “hexa” per brevità)

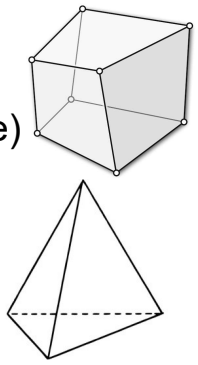


tetraedro
(o “tetra” per brevità)

5

## Modelli 3D volumetrici ad **elementi finiti**

- ✓Tipo degli elementi:
  - ⇒hexahedra (anche detti “cuboidi”)
  - ⇒tetrahedra (piramidi a base triangolare)
  - ⇒poliedri generici (raro)



- ✓mesh poliedrale = mesh composta da elementi poliedrici adiacenti faccia a faccia
  - ⇒hexahedron mesh, o hexa-mesh
  - ⇒tetrahedron mesh tetra-mesh
- ✓esempio di visualizzatore: www.hexalab.net

6

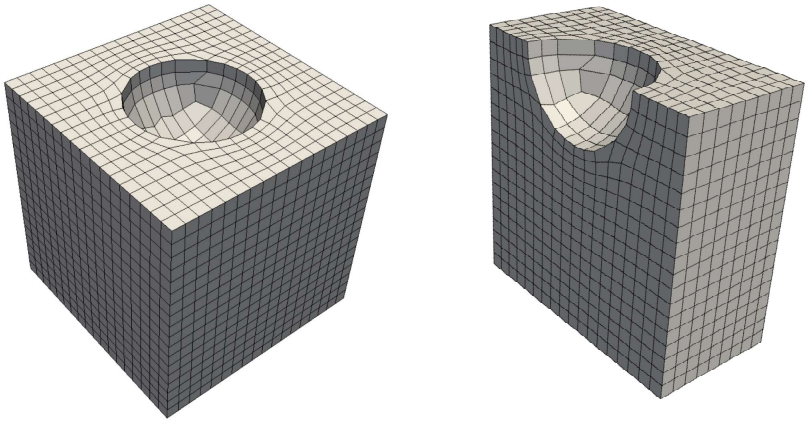
## Mesh poliedrale

- ✓Composta da
  - ⇒geometria:
    - vertici (0D), con pos (x,y,z)
  - ⇒connettività:
    - poliedri (3D)
    - facce (2D)
    - edge (1D)

    che connettono i vertici
  - ⇒attributi
    - per vertice, inteprolati nei poliedri
    - oppure, per poliedro
- ✓Struttura dati: simile alla mesh poligonale
  - ⇒indicizzata:
    - lista vertici,
    - lista poliedri
  - ⇒Esistono anche varianti per mesh poliedrali di struttura basata su half-edge

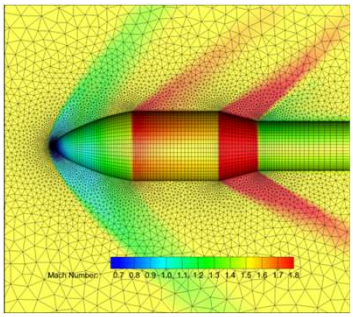
7

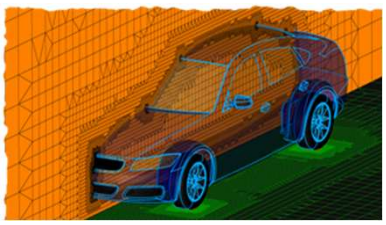
## Hexa-mesh



8

## context: FEA (Finite Element Analysis)

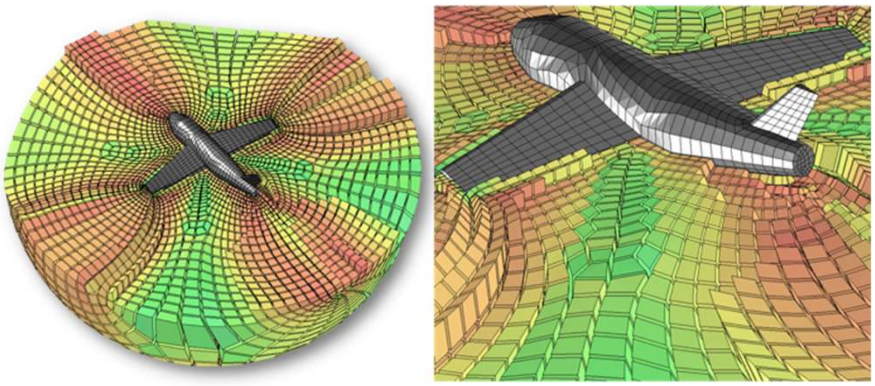




source: pointwise.com

9

## FEA simulation



Source: [Ruiz-Girones Roca Sarrate 2012]

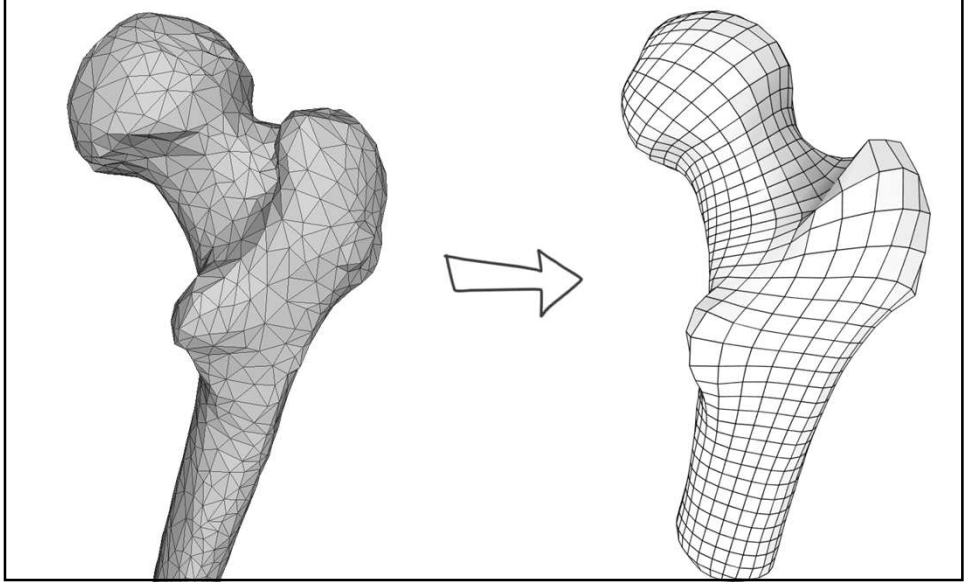
13

## Uso tipico: simulazioni fisiche

- ✓ FEM / FEA
  (Finite Element Method /
  Finite Element Analysis)
  - ⇒ Usata in ingegneria per verificare virtualmente le proprietà strutturali degli oggetti rappresentati
  - ⇒ Esempio: simulazione di carico:
    questo palazzo sostiene il suo peso?
    questo ponte sostiene il suo carico?
  - ⇒ Esempio: simulazione di termodinamica:
    come si diffonde il calore all'interno di questo oggetto?
  - ⇒ Simulazione dinamica o statica
- ✓ Le simulazioni sono il principale uso delle mesh poliedrali
- ✓ Problema (difficile): hexa-meshing o tetra-meshing:
  costuire una hexa-mesh o tetra-mesh
  a partire da una rappresentazione superficiale
  - ⇒ tipicamente, da una mesh poligonale (es: triangolare)

14

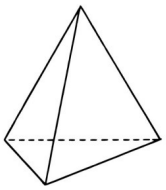
## Hexa-Mesh construction



15

## Tetraedri

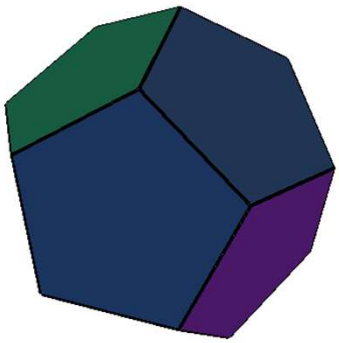
- ✓ Tetraedro: struttura *simpliciale* del volume
  - ⇒ come il triangolo è lo è della superficie.
  - ⇒ cioè: un tetraedro è il luogo di punti che sono l'interpolazione lineare fra i suoi quattro vertici
  - ⇒ cioè: ogni punto P dentro un tetraedro T (superficie compresa) è esprimibile come una (e una sola) combinazione lineare dei quattro vertici di T
  - ⇒ i 4 pesi di questa combinazione (quattro scalari) sono detti le coordinate baricentriche di P dentro T
  - ⇒ posso usare le coordinate baricentriche per interpolare gli attributi definiti sui vertici di T
- ✓ In questo: la tetra-mesh (volumetrica) del tutto analoga alla tri-mesh (superficiale)

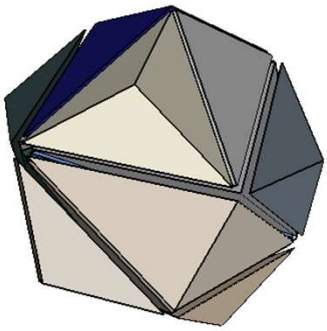


23

## Tetrahedralization

- ✓ Ogni poliedro può essere scomposto in tetraedri
  - ⇒Così come ogni poligono in triangoli

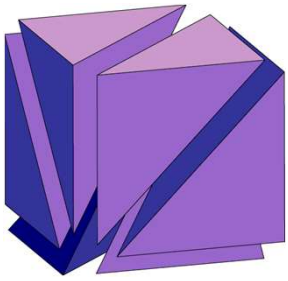




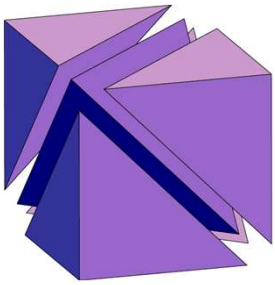
24

## Tetrahedralization

- ✓ Ogni poliedro può essere scomposto in tetraedri
  - ⇒…in modi diversi
  - ⇒un hexa, per esempio, ammette almeno due scomposizioni in tetraedri…



12 tetra



5 tetra

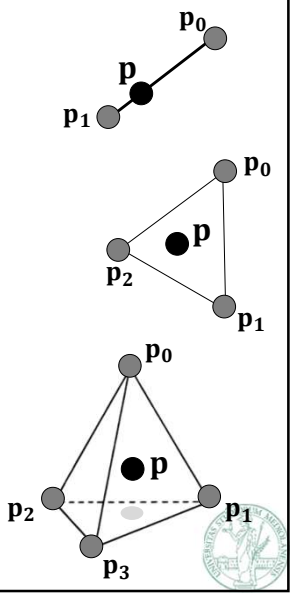
25

## Computo delle «coordinate baricentriche» dentro un qualsiasi elemento *simpliciale*

- ✓ E' lo stesso problema in tutte le dimensioni, con la stessa soluzione!
- ✓ Dato un tetraedro (o un triangolo, o un segmento) costituito dai suoi 4 (o 3, o 2) vertici $\mathbf{p}_0 \dots \mathbf{p}_n$ e un punto $\mathbf{p}$ al suo interno, trovare le 4 (o 3,o 2) «coordinate baricentriche» di $\mathbf{p}$ dentro a quel tetraedro (o triangolo, o segmento)
- ✓ cioè i 4 (o 3, o 2) valori scalari $t_0 \dots t_n$ tali che

$$\mathbf{p} = \sum_i t_i \ \mathbf{p}_i \qquad \sum_i t_i = 1 \qquad \forall i : \ 0 \leq t_i \leq 1$$

- ✓ Il valore dell'attributo $a$ in $\mathbf{p}$ sarà dato dalla *stessa* combinazione lineare degli attributi $a_0 \dots a_n$ definiti sui vertici : $a = \sum_i t_i \ a_i$

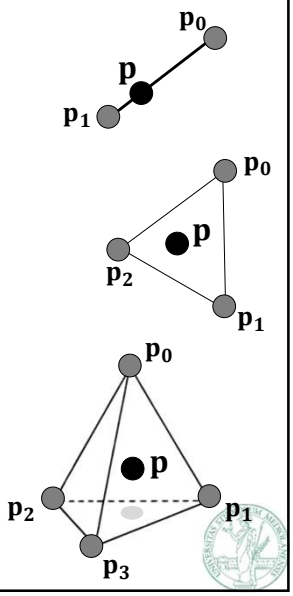



26

## Computo delle «coordinate baricentriche» dentro un qualsiasi elemento *simpliciale*

- ✓ Schema generale della soluzione
1. Unire i 4 (3, 2) vertici $\mathbf{p}_0 \dots \mathbf{p}_n$ al punto $\mathbf{p}$
2. Hai ottenuto 4 (3,2) nuovi sotto-tetraedri (-triangoli, -segmenti) che scompongono il tetraedro (triangolo, segmento) originale
3. Calcola l'estensione (cioè il volume, o l'area, o la lunghezza) di questi nuovi sotto-elementi
4. La coordinata baricentrica $t_i$ è data dall' estensione dell'elemento opposto al vertice $\mathbf{p}_i$ diviso la somma delle estensioni (cioè diviso l'estensione dell'elemento originale)

- ✓ Esercizio: scrivere la formula nei tre casi, ipotizzando di avere una funzione volume( p0,p1,p2,p3 ) che restituisce il volume di un tetraedro di 4 vertici dati




27

## Tetra meshes o Hexa Meshes?

- ✓ Risoluzione di una mesh poliedrale: n. di poliedri (o di vertici)
  - ⇒ maggiore risoluzione: simulazioni più accurate ma più lente
  - ⇒ nota: numero di elementi è CUBICO con 1/d, con d = dimensione lineare
- ✓ Può essere adattiva (e spesso lo è)
- ✓ Multi-risoluzione:
  piramidi di livello di dettaglio sono possibili
  - ⇒ similmente alle mesh poligonali
- ✓ Categorie, simili a mesh poligonali:
  - ⇒ «Pure» hexa-mesh: solo elementi hexa
  - ⇒ «Hexa-dominant» mesh: grande maggioranza di elementi Hexa
- ✓ Esiste un concetto di regolarità locale anche
  per le hexa meshes / tri meshes
  - ⇒ analogo a quello delle alle mesh, ma definito sugli edge:
    un edge di una hexa mesh è regolare sse è condiviso da 4 hexa
    un edge di una tetra mesh è regolare sse è condiviso da 6 tetra
  - ⇒ mesh semiregolare: maggioranza di edge regolari.

29

## Tetra meshes o Hexa Meshes

- ✓ Per poter essere utilizzata in una simulazione, una hexa mesh / tetra mesh deve avere elementi di buona «qualità», cioè (semplificando), la loro forma deve essere lontana dall'essere degenere (cioè piatta o, peggio, concava)
  - ⇒ la generazione di mesh poliedrali con questa caratteristica è un problema aperto e difficile
  - ⇒ la generazione è fatta a partire da una struttura superficiale, es una mesh polignonale (deve essere two-manifold, chiusa, ben orientata)
- ✓ Hexa meshes:
  - ⇒ sono più difficili da costruire
  - ⇒ in compenso, le simulazioni su hexa mesh sono più efficienti
    (a parità di risoluzione)
    o più accurate (a parità di tempo di esecuzione)
  - ⇒

30

## Una (imperfetta) categorizzazione dei tipi di modelli digitali 3D

| | | ELEMENTI DISCRETI | | | CONTINUI |
|---|---|---|---|---|---|
| | | regolari *«a griglia»* | semi-regolari o irregolari | | |
| | | | elementi simpliciali | elementi non simpliciali | |
| SUPERFICIALI | 2-manifold *«rappresenta una vera superficie»* | **Height Field** **Range Scan** | **Triangle Mesh** | **Polygonal Mesh** **Quad Mesh** **Quad dominant Mesh** | **Subdivision surfaces** **Parametric Surfaces** **(es. B-splines)** |
| | non-manifold *«non rappresenta una sup»* | **Set di Range Scan** | **Point Cloud** | | |
| VOLUMETRICI | (3-manifold) | **Voxelized Volume** **Volumetric Textures** | **Tetra Mesh** | **Hexa Mesh** | **Implicit models** **(es. CSG)** |

31

## Modelli 3D Volumetrici

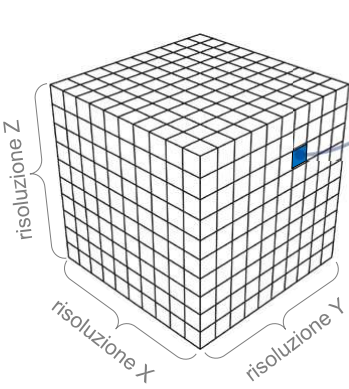
1. Discreti & irregolari: mesh poliedrali
   ⇒Tetra-mesh, hexa-mesh
   ⇒insieme di poliedri adiacenti faccia a faccia

2. Discreti & regolari: dataset voxellizati
   ⇒analogo di un immagine rasterizzata, ma in 3D
   ⇒una griglia 3D regolare di voxel

3. Continui: modelli impliciti
   ⇒rappresentazione basata su funzioni volumetriche
   ⇒superficie: luogo di zeri di questa funzione

32

## Modello 3D a voxel (o voxellizato)




Griglia regolare 3D
(o lattice)

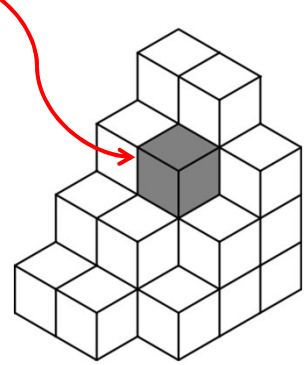
consumo memoria *cubico* con la risoluzione
(diventa facilmente ingestibile)

```
array [RES_X] [RES_Y] [RES_Z] of Voxels
```

33

## Modelli Voxellizati

- ✓"Voxel" = Volume element
  - ⇒Così come…
    "Pixel" = Picture Element
    "Texel" = Texture Element
- ✓Elemento di una griglia regolare 3D
  - ⇒che è anche detta un lattice
- ✓In codice:

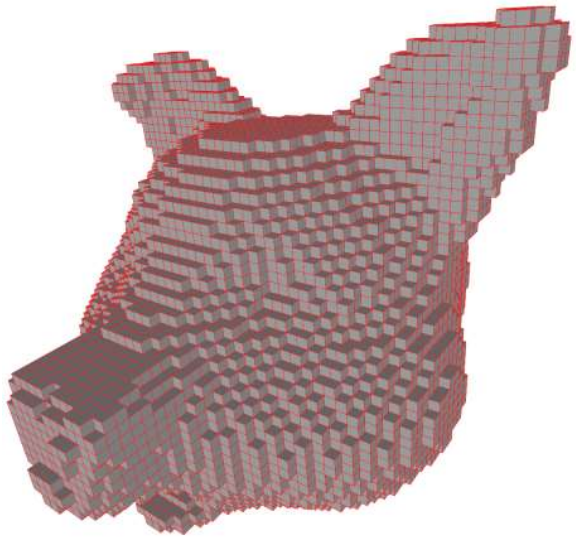


```
Voxel[][][] data = new Voxel[resX][resY][resZ];
```

Esempio in Java

34

## In questo caso, 1 Voxel = 1 Boolean (1 bit)



ogni *voxel* è pieno (1) o vuoto (0)

35

## Occupazione spaziale dei dataset voxelizzati

- ✓Lo spazio è cubico con la risoluzione (linare)
- ✓E' di solito un prezzo troppo alto
  - ⇒Es: 1024^3 voxel = 1 gigavoxel
  - ⇒Molto oneroso, persino nel caso, come quello visto sopra, con un solo bit per voxel (1 = pieno / 0 = vuoto)
  - ⇒Quando si memorizza 1 byte, 1 float, 1 double, 1 colore… etc, la situazione peggiora
- ✓Detta la «curse of dimensionality»

36