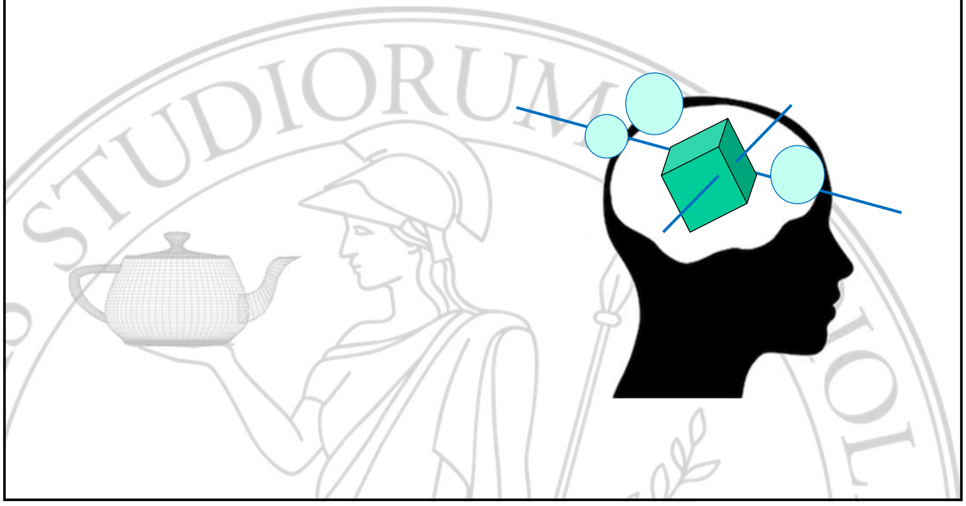
Marco Tarini - Computer Graphics 2023/2024
Università degli Studi di Milano

Interpolazione di punti e coordinate baricentriche



36

Combinazione lineare (di *n* vettori)

- I **vettori** sono dotati delle operazioni di
  - ⇒ scalatura (moltiplicaz per scalare)
  - ⇒ somma (vettoriale)
- Dunque, posso effettuare **combinazioni lineari** di due o più vettori

$$\vec{\mathbf{w}} = k_0\,\vec{\mathbf{v}}_0 + k_1\,\vec{\mathbf{v}}_1 + k_2\,\vec{\mathbf{v}}_2$$

i **"Pesi"** della combinazione lineare

Combinazione lineare di $\vec{\mathbf{v}}_0$, $\vec{\mathbf{v}}_1$ e $\vec{\mathbf{v}}_2$

37

Interpolazione ed estrapolazione (di *n* vettori)

- ✓ Quando i pesi $k_0 \; k_1 \; k_2 \; \dots$ sono positivi e a somma 1, cioè:

$$\sum_i k_i = 1 \qquad \text{e} \qquad \forall\, i \,.\, 0 \leq k_i \leq 1$$

  - ⇒ cioè quando i pesi sono una «partizione dell'unità»
- ✓ allora la combinazione lineare si chiama **interpolazione** (lineare)
  - ⇒ O anche, semplicemente: una «media pesata»
  - ⇒ Caso particolare: se i pesi sono tutti uguali a $1/n$: una media
- ✓ Se invece

$$\sum_i k_i = 1 \qquad \text{ma} \qquad \exists \; i \,.\; k_i < 0$$

- ✓ allora abbiamo una **estrapolazione** (lineare)

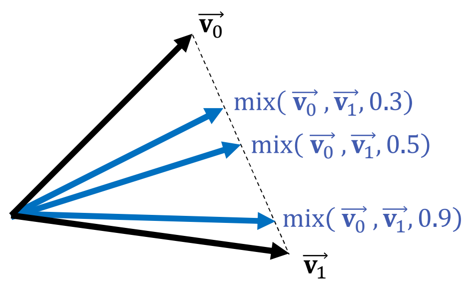
38

Interpolazione fra 2 elementi

- ✓ Quando $n \;=\; 2$, uno dei due pesi è esprimibile come differenza dell'altro
  - ⇒ quindi abbiamo un solo paramametro: t , uno dei due pesi e l'atro peso è dato da $(\,1\,-\,t\,)$.
  - ⇒ L'interpolazione diventa…

$$\text{mix}(\,\vec{\mathbf{v}_0}\,,\vec{\mathbf{v}_1}, t) \;=\; (\,1\,-\,t\,)\,\vec{\mathbf{v}_0} + \,(\,t\,)\,\vec{\mathbf{v}_1}$$

Un sinonimo di “interpolazione”



39

Come si interpola fra …

⇒…due **vettori** $\mathbf{v}_0$ e $\mathbf{v}_1$:

$$\mathbf{v}_0\,(1-t) + \mathbf{v}_1\,(t)$$

Interpolazione lineare

⇒…due **punti** $\mathbf{p}_0$ e $\mathbf{p}_1$:

$$\mathbf{p}_0\,(1-t) + \mathbf{p}_1\,(t)$$

Moltiplicazione fra punti e scalari? Somma fra punti? Queste operazioni, prese individualmente, non hanno alcun senso geometrico

è solo una riscrittura di:

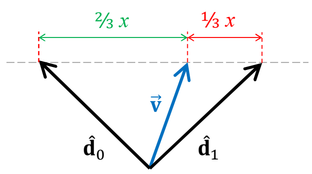
$$\mathbf{p}_0 + (\mathbf{p}_1 - \mathbf{p}_0)\,t$$

operazioni che hanno un senso geometrico (esercizio: verifica)

40

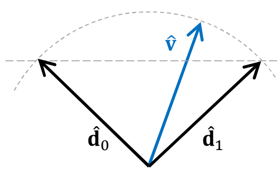
Interpolazione fra vettori unitari

✓ Attenzione! Interpolando fra due vettori unitari si ottiene un vettore non più unitario



$$\vec{\mathbf{v}} = \tfrac{1}{3}\,\hat{\mathbf{d}}_0 + \tfrac{2}{3}\,\hat{\mathbf{d}}_1$$

✓ Se si necessita un vettore unitario, occorre rinormalizzare dopo l'interpolazione



$$\hat{\mathbf{v}} = \frac{\tfrac{1}{3}\,\hat{\mathbf{d}}_0 + \tfrac{2}{3}\,\hat{\mathbf{d}}_1}{\left\| \tfrac{1}{3}\,\hat{\mathbf{d}}_0 + \tfrac{2}{3}\,\hat{\mathbf{d}}_1 \right\|}$$

41

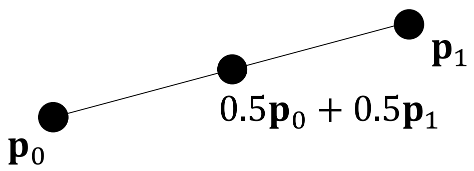
Interpolazione fra due elementi

- Terminologia: (usata in librerie, linguaggi di programmazione…)
  - ⇒ **interpolate** = **mix** = **blend** = **lerp** "L" = espressamente lineare
- **Interpolare** fra coppie di <*qualcosa*> :
  - ⇒ mix(point , point , t) → point
  - ⇒ mix(vector , vector , t) → vector
- t è il **«peso» scalare**
  - ⇒ t = 0 → prendi il primo dei due
  - ⇒ t = 1 → prendi il secondo dei due
  - ⇒ $t \in (0,1)$ → prendi un misto dei due, ad esempio: un'interpolazione propriamente detta
  - ⇒ t = 0.5 → prendi la **media** dei due
  - ⇒ t = 0.1 → quasi il primo, con un pochino del secondo
  - ⇒ t < 0 or t > 1 → **estrapolazione**

42

Segmento come luogo di punti

- Dati due punti $\mathbf{p}_0$ e $\mathbf{p}_1$, analizziamo l'insieme di tutti i punti ottenibili interpolando $\mathbf{p}_0$ e $\mathbf{p}_1$:
- E' il segmento che li connette!

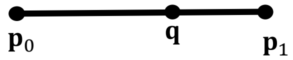


- "Un segmento è l'insieme dei punti ottenibili interpolando i suoi due estremi"
  - ⇒ Domanda (esercizio): qual è invece il luogo dei punti ottenibili come un'estraploazione di $\mathbf{p}_0$ e $\mathbf{p}_1$?

43

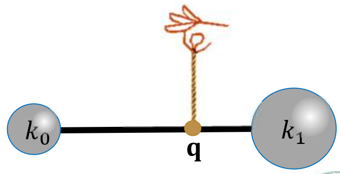
Coordinate baricentriche in un segmento

- E' anche vero il viceversa:
  qualsiasi punto in un segmento $\mathbf{S}$ è dato da una (e una sola!) interpolazione dei suoi due estremi $\mathbf{p}_0$ e $\mathbf{p}_1$
  - ⇒ Con i pesi opportunamente scelti
- Cioè dato un punto $\mathbf{q} \in \mathbf{S}$,
  esistono unici k_0 , $k_1 \in [0,1]$
  con $k_0 + k_1 = 1$
  tali che



$$\mathbf{q} = k_0\ \mathbf{p}_0 + k_1\ \mathbf{p}_1$$

- k_0 , k_1 sono dette le **coordinate baricentriche** di $\mathbf{q}$ nel segmento $\mathbf{S}$
  - ⇒ Perchè (motivazione storica)…
    se poniamo due masse k_0 e k_1
    in $\mathbf{p}_0$ e $\mathbf{p}_1$, allora $\mathbf{q}$ diventa
    il baricentro del segmento

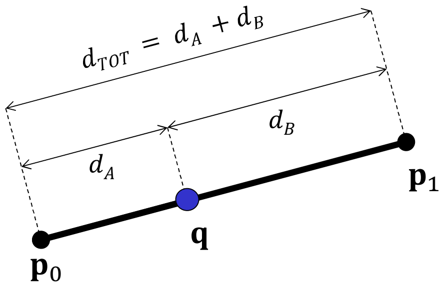


45

Coordinate baricentriche in un segmento

- Problema:
  - ⇒ dato un segmento $\mathbf{S}$ di estremi $\mathbf{p}_0$ e $\mathbf{p}_1$ e un punto $\mathbf{q} \in \mathbf{S}$,
    come trovo le coordinate baricentriche di $\mathbf{q}$?

$$\mathbf{q} = k_0\ \mathbf{p}_0 + k_1\ \mathbf{p}_1$$



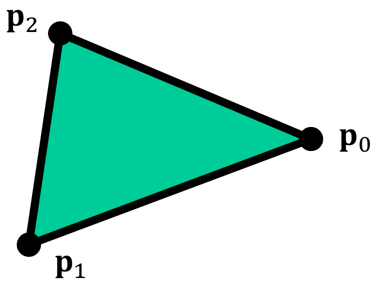
$$k_0 = d_B \,/\, d_{TOT}$$
$$k_1 = d_A \,/\, d_{TOT}$$

- Soluzione:
  - ⇒ q spezza S in due sotto-segmenti. L'estensione di ciascun sottosegmento (diviso l'estensione totale di S) è la coordinata baricentrica relativa all'estremo OPPOSTO (verifica con delle prove)

46

Triangolo come luogo di punti

- ✓ Dati tre punti (in 2D oppure in 3D) $\mathbf{p}_0$, $\mathbf{p}_1$ e $\mathbf{p}_2$, consideriamo l'insieme di tutti i punti ottenibili dalla loro interpolazione
- ✓ E' il triangolo che ha i vertici in quei tre punti!



- ✓ "Un triangolo è l'insieme dei punti ottenibili interpolando i suoi tre vertici"
  - ⇒ Domanda (esercizio): qual è invece il luogo dei punti ottenibili come una loro estraploazione ?

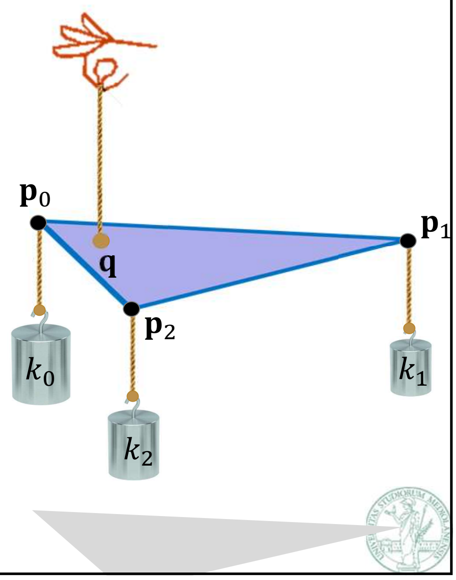
47

Triangolo come luogo di punti

- ✓ Dato un triangolo $\mathbf{T}$ (in 3D) di vertici $\mathbf{p}_0$ e $\mathbf{p}_1$ e $\mathbf{p}_2$
  e un punto $\mathbf{q} \in \mathbf{T}$,
  esistono unici
  $k_0 , \ k_1 , k_2 \in [0,1]$
  con $k_0 + k_1 + k_2 = 1$
  tali che

  $$\mathbf{q} = k_0 \ \mathbf{p}_0 + k_1 \ \mathbf{p}_1 + k_2 \ \mathbf{p}_1$$

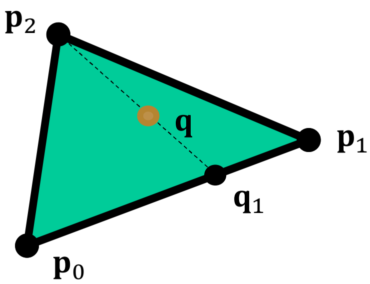
- ✓ k_0, k_1, k_2 sono dette le **coordinate baricentriche** di $\mathbf{q}$ nel triangolo $\mathbf{T}$
  - ⇒ Stessa motivazione storica…
    se poniamo dei pesi k_0 , k_1 e k_2
    in $\mathbf{p}_0$, $\mathbf{p}_1$ e $\mathbf{p}_2$,
    allora $\mathbf{q}$ diventa
    il baricentro del triangolo



49

Triangolo come luogo di punti

- Dimostrazione dell'esistenza e unicità delle coord. bari.(traccia):



- ⇒ Estendi il segmento da $\mathbf{p}_2$ a $\mathbf{q}$, fino ad incontrare $\mathbf{q}_1$ sul lato opposto.
- ⇒ $\mathbf{q}_1$ è nel segmento con estremi $\mathbf{p}_0$ e $\mathbf{p}_1$
  $$\Rightarrow \quad \mathbf{q}_1 = k_0\, \mathbf{p}_0 + k_1\, \mathbf{p}_1, \qquad k_0 + k_1 = 1$$
- ⇒ $\mathbf{q}$ è nel segmento con estremi $\mathbf{p}_2$ e $\mathbf{q}_1$
  $$\Rightarrow \quad \mathbf{q} = h_0\, \mathbf{p}_2 + h_1\, \mathbf{q}_1 \quad , \qquad h_0 + h_1 = 1$$
- ⇒ Sostituendo…

50

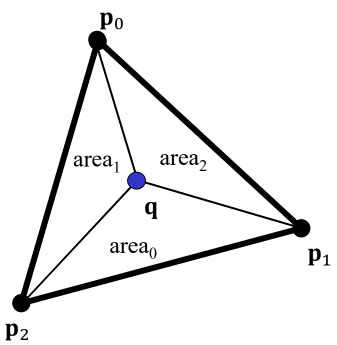
Coordinate baricentriche in un triangolo

- Problema:
  - ⇒ dato un triangolo $\mathbf{T}$ con vertici nei punti 3D $\mathbf{p}_0$, $\mathbf{p}_1$, $\mathbf{p}_2$ e un punto $\mathbf{q} \in \mathbf{T}$ trovare le coordinate baricentriche di $\mathbf{q}$ in $\mathbf{T}$?

$$\mathbf{q} = k_0\, \mathbf{p}_0 + k_1\, \mathbf{p}_1 + k_2\, \mathbf{p}_2$$

$$\text{area}_{\text{TOT}} = \text{area}_0 + \text{area}_1 + \text{area}_2$$

$$k_0 = \text{area}_0 \,/\, \text{area}_{\text{TOT}}$$
$$k_1 = \text{area}_1 \,/\, \text{area}_{\text{TOT}}$$
$$k_2 = \text{area}_2 \,/\, \text{area}_{\text{TOT}}$$

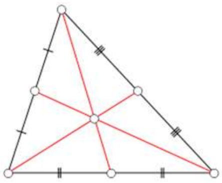


- Soluzione:
  - ⇒ $\mathbf{q}$ spezza $\mathbf{T}$ in tre sotto-triangoli. L'area di ciascun sotto-triangolo (diviso l'area totale di $\mathbf{T}$) è la coordinata baricentrica relativa all'estremo OPPOSTO (verifica con delle prove)

51

Coordiante baricentriche: esercizi

- ✓ Dato un triangolo di vertici $\mathbf{p}_0, \mathbf{p}_1, \mathbf{p}_2$
  quali sono le coordinate baricentriche di…
  - ⇒ il punto $\mathbf{p}_1$
  - ⇒ un punto a metà del lato fra $\mathbf{p}_0$ e $\mathbf{p}_1$
  - ⇒ il baricentro del triangolo
    detto anche centroide del triangolo



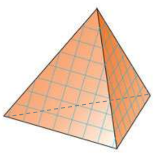
Nota: il baricentro di un triangolo è l'intersezione delle tre mediane e seca ogni mediana ad 1/3 della sua lunghezza

  - ⇒ un punto nel segmento fra $\mathbf{p}_0$ e $\mathbf{p}_1$
    che dista da $\mathbf{p}_0$ il triplo di quanto dista da $\mathbf{p}_1$

52

Oltre a N = 3…

- ✓ Le interpolazioni fra 2 punti (in 2D o 3D) formano un **segmento**
  - ⇒ i 2 punti sono i suoi estremi
- ✓ Le interpolazioni fra 3 punti (in 2D o 3D) formano un **triangolo**
  - ⇒ i 3 punti sono i suoi vertici
- ✓ Le interpolazioni fra 4 punti (in 3D) formano un **tetraedro**
  - ⇒ i 4 punti sono i suoi vertici



Tetraedro = piramide a base triangolare
un solido delimitato da 4 triangoli

  - ⇒ la cosa è generalizzabile a dimensioni maggiori ma non ci interessa
- ✓ Per questo, le sequenze di segmenti (linee spezzate),
  le superfici triangolate (mesh triangolari),
  e le mesh tetraedri (mesh volumetriche – vedi più avanti)
  sono dette **complessi simpliciali**

53