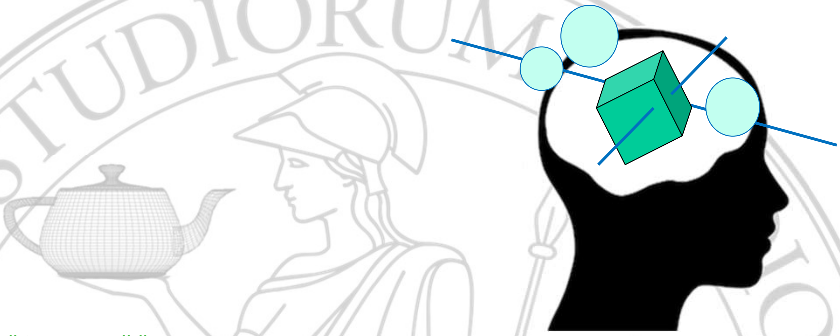


Marco Tarini - Computer Graphics 2023/2024
Università degli Studi di Milano

Vector and Point algebra part 5: prodotto dot



Libro di testo possibile:
"Mathematics for 3D Game Programming and Computer Graphics, Third Edition"
Sec 2.2

69

Prodotto dot (operaz fra due vettori)

- ✓ «dot-product» vettore × vettore → scalare
  - ⇒detto anche prodotto scalare
- ✓ E' definito per tutte le dimensioni (vettori di qualsiasi numero di elementi)
- ✓ In tre dimensioni:

$$\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} d \\ e \\ f \end{pmatrix} = ad + be + cf$$

70

Prodotto dot: intro

✓ Va da due vettori a uno scalare

$$\vec{v} \cdot \vec{w} \in \mathbb{R}$$

$$\vec{v} \cdot \vec{w} = (v_x, v_y, v_z) \cdot (w_x, w_y, w_z) = v_x w_x + v_y w_y + v_z w_z$$

⇒ Come stiamo per vedere, questa semplice operazione (esprimibile come un computo banale delle coordinate dei suoi operatori) è associata ad una semantica spaziale (e non solo) molto ricca

⇒ In particolare, a noi sarà molto utile come *test di ortogonalità*: fa 0 *sse* i due operatori sono ortogonali (formano un angolo retto) (oppure se almeno uno di loro è un vettore degenere)

⇒ Nota: il prodotto dot è definito in qualsiasi dimensione (con 2 - piani, 3 - spazi, o maggiore di 3 - iperspazi) e tutto quello che stiamo per dire vale in qualsiasi dimensione

71

Prodotto dot: nomi alternativi

$$\vec{v} \cdot \vec{w} \in \mathbb{R}$$

con $\vec{v}, \vec{w} \in \mathbb{R}^3$

✓ E' detto anche:

⇒ Prodotto dot (perché si scrive con un puntino)

⇒ Prodotto scalare (perché restituisce uno scalare)

⇒ Prodotto «riga-per-colonna», *se* scrivo il primo vettore come riga e il secondo come colonna, cosa che posso scrivere ($\vec{v}^T \vec{w}$)

⇒ Prodotto interno

72

Prodotto Dot: notazioni

- Denotato anche come:

$\vec{v} \cdot \vec{w}$ nota il "pallino", che dà il nome al prodotto (non si omette!). Useremo questa notazione.

$< \vec{v} , \vec{w} >$

$\vec{v}^T \ \vec{w}$ "Il trasposto di v (v come vettore riga, cioè una matrice 1x3) per il vettore colonna w" (cioè una matrice 3x1)

- Nel codice si trova (in linguaggi o librerie) con sinassi come:

`dot(v,w)`	`v.dot(w)`	`v*w`
funzione (metodo più comune)	metodo	operatore (infisso)

73

Prodotto dot: alcune proprietà algebriche

- Commuta:

$$\vec{v} \cdot \vec{w} = \vec{w} \cdot \vec{v}$$

- E' lineare, cioè
  - ⇒Distribuisce con scalatura:

$$k\ (\vec{v} \cdot \vec{w}) = \ (k\ \vec{v}) \cdot \vec{w} = \vec{v} \cdot (k\vec{w})$$

  - ⇒Distribuisce con la somma vettoriale:

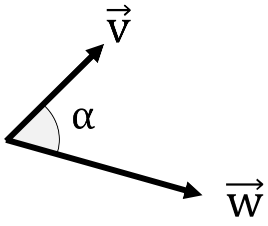
$$\vec{w} \cdot (\vec{u} + \vec{v}) = \vec{w} \cdot \vec{u} + \vec{w} \cdot \vec{v}$$

- Riscrittura della norma:

$$\vec{v} \cdot \vec{v} \ = \ ||\vec{v}||^2 \quad \text{cioè} \quad ||\vec{v}|| \ = \ \sqrt{\vec{v} \cdot \vec{v}}$$

74

Prodotto dot e coseno



$$\vec{v} \cdot \vec{w} = \|\vec{v}\| \; \|\vec{w}\| \; \cos(\alpha)$$

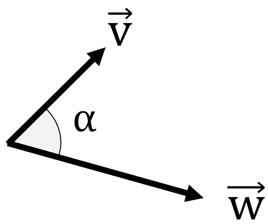
quindi se $\vec{v}$ e $\vec{w}$ non sono nulli: $\vec{v} \cdot \vec{w} = 0 \iff$ **u** e **v** ortogonali

se $\hat{v}$ e $\hat{w}$ sono unitari: $\hat{v} \cdot \hat{w} = \cos(\alpha)$

75

Prodotto dot e angolo

- ✓ Se $\vec{v}$ oppure $\vec{w}$ è degenere (vettore nullo) allora $\vec{v} \cdot \vec{w} = 0$
- ✓ Altrimenti:
  - ⇒ $\vec{v} \cdot \vec{w} > 0$ i due vettori sono **concordi**, $\alpha < 90°$
  - ⇒ $\vec{v} \cdot \vec{w} = 0$ i due vettori sono **ortogonali**, $\alpha = 90°$
  - ⇒ $\vec{v} \cdot \vec{w} < 0$ i due vettori sono **discordi**, $\alpha > 90°$



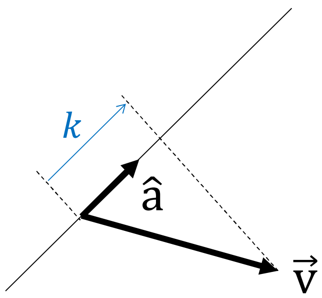
76

Prodotto dot fra vettori unitari

- ✓Siano $\hat{v}$ e $\widehat{w}$ due vettori unitari
- ✓I due vettori sono…
  - ⇒sse $\hat{v} \cdot \widehat{w} = 1$: coincidenti, cioè uguali
  - ⇒sse $0 < \hat{v} \cdot \widehat{w} < 1$: concordi (ma non uguali)
  - ⇒sse $\hat{v} \cdot \widehat{w} = 0$: ortogonali
  - ⇒sse $-1 < \hat{v} \cdot \widehat{w} < 0$: discordi (ma non opposti)
  - ⇒sse $\hat{v} \cdot \widehat{w} = -1$: opposti
- ✓In pratica: fra vettori unitari, il prodotto dot è una misura della somiglianza fra i due vettori, da +1 a –1

77

Prodotto dot e proiezione



$$k = \hat{a} \cdot \vec{v}$$

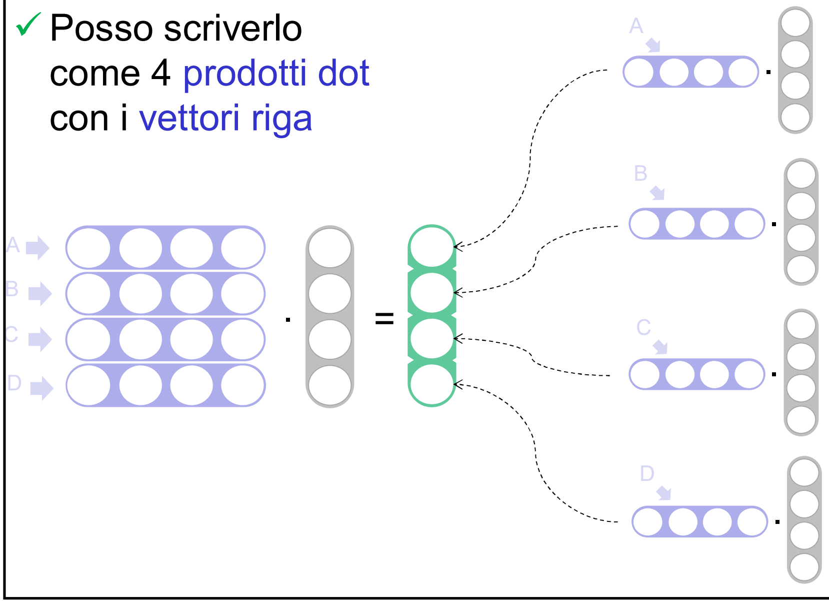
se $\hat{a}$ è unitario:

$\hat{a} \cdot \vec{v} =$ estensione di $\vec{v}$ in direzione $\hat{a}$

78

Ripasso: prodotto Matrice × Vettore («riga per colonna»)

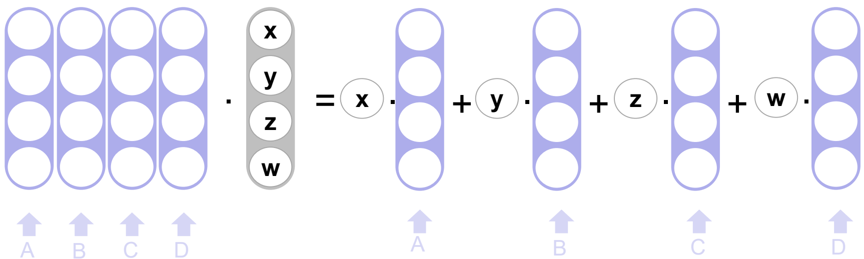
✓ Posso scriverlo come 4 prodotti dot con i vettori riga



79

Ripasso: prodotto Matrice × Vettore («riga per colonna»)

✓ Ma posso anche scriverlo come: una combinazione lineare dei vettori colonna



80