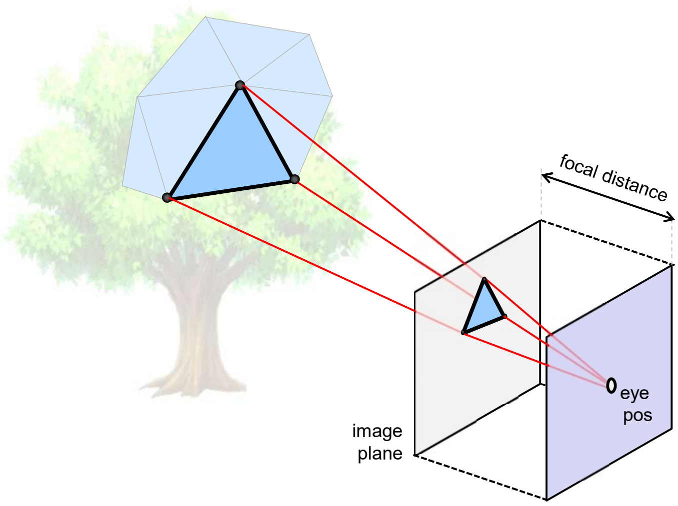


Marco Tarini - Computer Graphics 2023/2024
Università degli Studi di Milano

trasformazioni spaziali

1

Rasterization based rendering



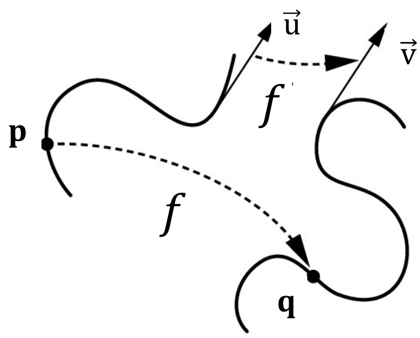
2

La fase per vertice del rasterization-based rendering (la «transform» di «transform and lighting»)

- Si tratta di una “trasformazione spaziale”
- Occupiamoci dunque di “trasformazioni spaziali”

3

Trasformazioni spaziali



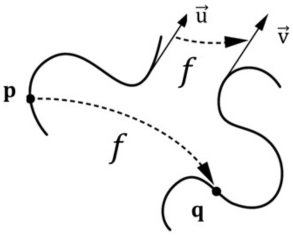
$$\mathbf{q} = f(\mathbf{p})$$

$$\vec{v} = f(\vec{u})$$

5

Trasformazioni spaziali

- ✓ Funzioni che
  - ⇒ prendono un punto / vettore
  - ⇒ lo mappano in un altro punto / vettore



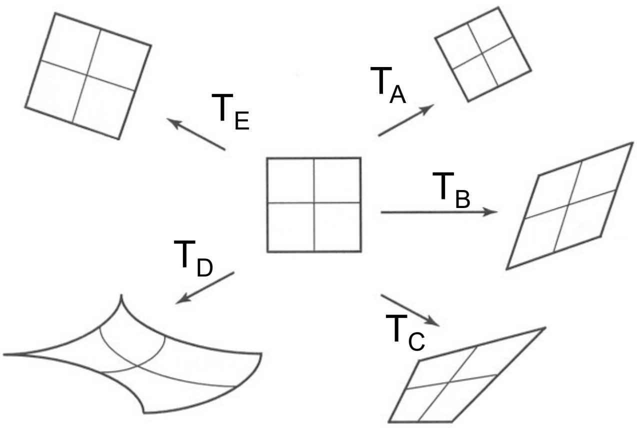
$$\mathbf{q} = f(\mathbf{p})$$
$$\vec{\mathrm{v}} = f(\vec{\mathrm{u}})$$

Trasformando tutti i punti e i vettori della rappresentazione di un modello 3D, (come: le posizioni dei vertici di una mesh, i punti di controllo di una superficie parametrica, la mesh di controllo di una sup. di suddivisione…) trasformo spazialmente l'oggetto rappresentato

Se l'input di f è un punto, allora l'output è un punto.
Se l'input di f è un vettore, allora l'output è un vettore

6

Trasformazioni spaziali: in generale

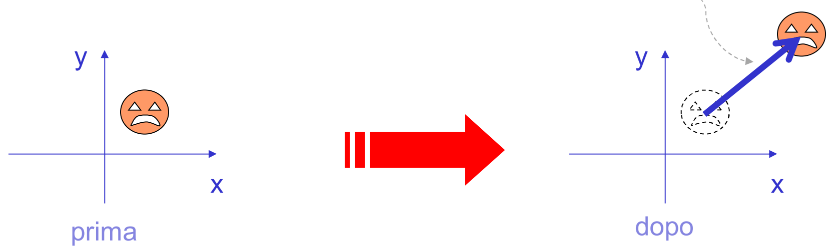


Vediamo alcuni semplici esempi

7

Esempio: Trasformazione di **Traslazione**

$$f\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} + \underbrace{\begin{pmatrix} \alpha_x \\ \alpha_y \\ \alpha_z \end{pmatrix}}_{\text{vettore di traslazione}} = \begin{pmatrix} x+\alpha_x \\ y+\alpha_y \\ z+\alpha_z \end{pmatrix}$$



8

Esempio: Trasformazione di **Traslazione**

✓ Osservazioni:

- ⇒ i punti vengono traslati
  - es: le posizioni dei vertici della mesh
- ⇒ ma i vettori devono rimanere invariati
  - es: le normali alla superficie
    - la direzione: «da che parte guarda la faccia»
    - il vettore «distanza fra gli occhi»

    non subiscono cambiamenti dopo la traslazione

$$f\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x+\alpha_x \\ y+\alpha_y \\ z+\alpha_z \end{pmatrix}$$

per punti

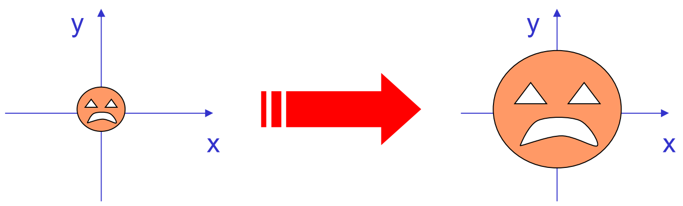
$$f\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

per vettori

9

Esempio:
Trasformazione di **Scalatura** (uniforme)

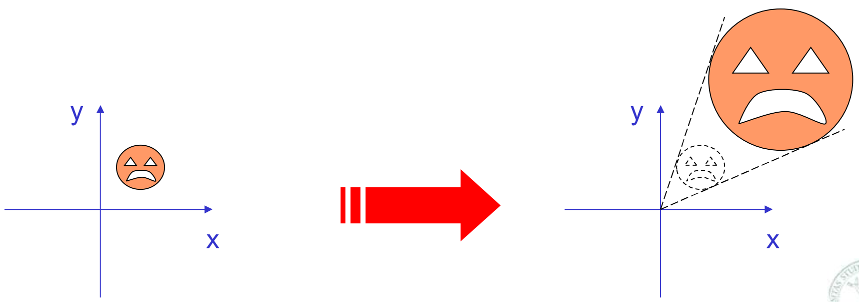
$$f\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \gamma \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \gamma \cdot x \\ \gamma \cdot y \\ \gamma \cdot z \end{pmatrix}$$



10

Esempio: trasformazione di **scalatura** (uniforme)

nota: stesso effetto su punti e vettori
(es: il vettore “distanza fra gli occhi” viene scalato)
nota: applicata ai punti
"scala" anche la distanza dall'origine



11

Esempio: trasformazione di **scalatura** uniforme

- ✓ Detta «**uniforme**» o «**isotropica**» perché applica lo stesso rapporto di scala a tutte e tre le coordinate
  - ⇒quindi i vettori vengono scalati di una stessa quantità, indipendentemente dalla loro direzione
  - ⇒vale non solo per vettori allineati all'asse X, Y o Z, ma anche per vettori orientati in qualsiasi direzione
  - ⇒terminologia (in questo o altri contesti):
    - Invarianza rispetto alla direzione = «**isotropia** »
    - Dipendenza dalla direzione = «**anisotropia** »

12

Trasformazione di Scalatura (di qualsiasi tipo)

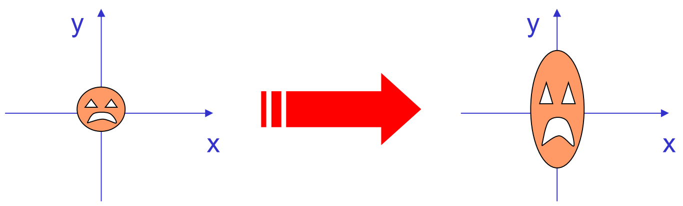
- ✓ Osservazioni:
  - ⇒Si applica tanto a punti che a vettori
    - (es: se ingrandisco un dinosauro – tutti i punti che lo definiscono, allora ingrandisco anche il vettore che connette la sua coda alla sua testa)
  - ⇒Fattori di scala inferiori a 1 avvicinano i punti all'origine del sistema di riferimento
  - ⇒Fattori di scala maggiori di 1 lo allontanano
  - ⇒Fattore di scala uguale ad 1: funzione identità
  - ⇒L'unico punto che viene sempre mappato su se stesso (cioè che rimane invariato) è l'origine, il punto (0,0,0)
  - ⇒E l'unico vettore che viene sempre mappato su se stesso (cioè che rimane invariato) è il vettore degenere (0,0,0)

13

Esempio: trasformazione di **scalatura** (anisotropica)

$$f\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \gamma_x \\ \gamma_y \\ \gamma_z \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \gamma_x \cdot x \\ \gamma_y \cdot y \\ \gamma_z \cdot z \end{pmatrix}$$

prodotto **componente per componente**
"component-wise product"
(non un'operazione canonica)



14

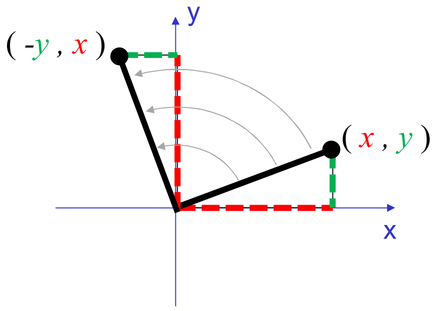
Trasformazione di Scalatura: terminologia

✓ Se $s_x = s_y = s_z$ le proporzioni dell'oggetto sono mantenute.
La scalatura viene detta
- ⇒ uniforme (*x, y* e *z* sono soggetti a fattori uniformi)
- ⇒ o conformale (mantiene la «forma»)
- ⇒ o isotropica («qualsiasi direzione viene trattata nello stesso modo»)
  - e non solo i vettori lungo gli assi x, y, e z subiscono un allungamento di s_x, ma anche quelli in qualsiasi altra direzione obliqua (verificare!)

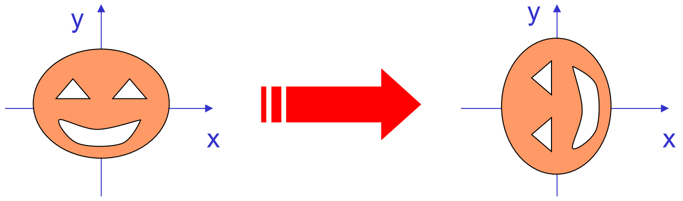
✓ Altrimenti, le proporzioni **non** sono mantenute.
La scalatura viene detta
- ⇒ non uniforme
- ⇒ o non conformale (non mantiene la forma (delle mesh, etc), deforma)
- ⇒ o anisotropica («dipende dalla direzione» (del vettore trasformato))

15

Esempio in 2D: trasf. di **rotazione di 90 gradi senso antiorario**

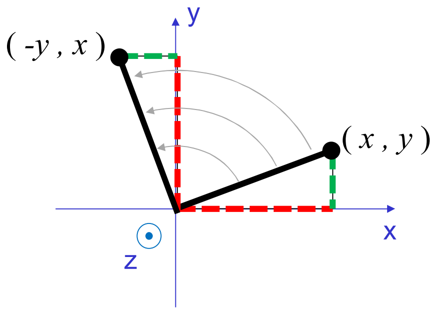


$$f\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -y \\ x \end{pmatrix}$$

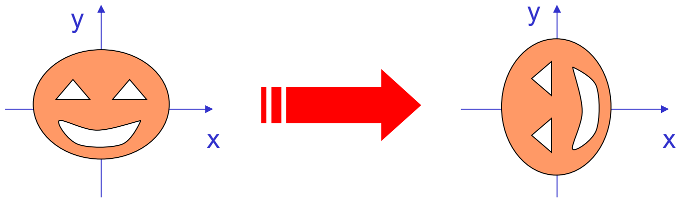


16

In 3D: trasf. di **rotazione di 90 gradi attorno all'asse delle z**

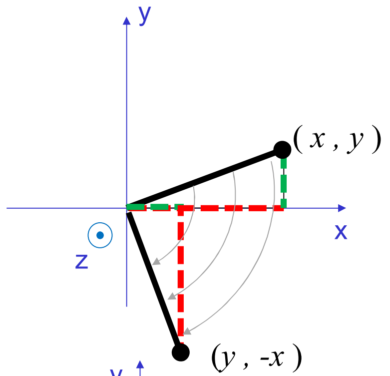


$$f\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -y \\ x \\ z \end{pmatrix}$$

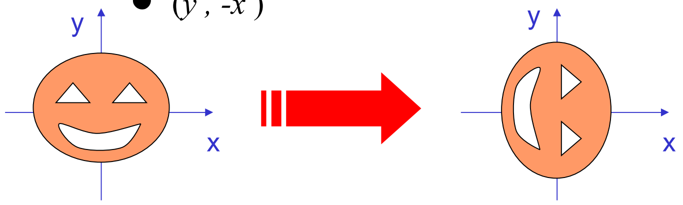


17

In 3D: trasf. di **rotazione di 90 gradi senso orario**



$$f\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y \\ -x \\ z \end{pmatrix}$$



18

Rotazioni di 90° (note)

- ✓ In 2D, la rotazione è attorno ad un punto: nel nostro esempio sopra, l'origine.
  - ⇒ L'origine è l'unico punto che rimane invariato
  - ⇒ Osserva un disegno su un foglio a quadretti: per ruotare attorno all'origine, basta: scambiare fra loro le coordiante x e y, e cambiare il segno ad una delle due (quale? Questo determina il verso della rotazione, se in senso orario o antiorario)
- ✓ In 3D, la rotazione è attorno ad una retta (l'asse di rotazione): nel nostro esempio sopra, la retta che concide con l'asse delle Z (in generale, una qualsiasi retta)
  - ⇒ I punti sull'asse di rotazione rimangono invariati

19

Rappresentazione di punti e vettori in coordinate **omogenee** (o **affini**)

Punti:

$$1 \Rightarrow \quad \mathbf{p} = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ 1 \end{bmatrix}$$

Vettori:

$$0 \Rightarrow \quad \vec{v} = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ 0 \end{bmatrix}$$

20

Rappresentazione di punti e vettori in coordinate **omogenee**

- ✓ Un **punto** di **coordinate cartesiane** (x, y, z)
  è rappresentato
  in **coordinate omogenee** come $(x, y, z, \mathbf{1})$
- ✓ Un **vettore** di **coordinate cartesiane** (x, y, z)
  è rappresentato
  in **coordinate omogenee** come $(x, y, z, \mathbf{0})$
- ✓ La coordinata affine viene spesso denotata dalla lettera w
- ✓ Nota: (da verificare!)
  questo è consistente con l'algebra di punti e vettori :
  punto – punto = vettore
  punto + vettore = punto

21

Trasformazioni spaziali come moltiplicazioni per matrici

- ✓ Esprimendo punti e vettori in coordinate omogenee (in un vettore colonna), possiamo esprimere le trasformazioni viste come una moltiplicazione di una matrice 4x4 $\mathbf{M}$
  - ⇒ $\mathbf{M}$ è detta la «matrice di trasformazione»
  - ⇒ Questo varrà anche per tutte le altre trasformazioni che vedremo
  - ⇒ Una trasformazione esprimibile in questo modo è detta «affine»
  - ⇒ In CG una matrice 4x4 è in pratica sinonimo di trasformazione spaziale

23

Trasformazioni Affini

- ✓ Quelle che posso esprimere come moltiplicazione con matrice 4x4 :

$$f\begin{pmatrix}\gamma_1\\\gamma_2\\\gamma_3\\1\end{pmatrix}=\begin{bmatrix}\alpha_{11}&\alpha_{12}&\alpha_{13}&\alpha_{14}\\\alpha_{21}&\alpha_{22}&\alpha_{23}&\alpha_{24}\\\alpha_{31}&\alpha_{32}&\alpha_{33}&\alpha_{34}\\\underbrace{0\quad 0\quad 0}_{}&&&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\gamma_1\\\gamma_2\\\gamma_3\\1\end{bmatrix}=\begin{pmatrix}\delta_1\\\delta_2\\\delta_3\\1\end{pmatrix}$$

sempre

punto di partenza in coordinate affini

punto di arrivo in coordinate affini

24

Trasformazioni Affini

✓ Quelle che posso esprimere come **moltiplicazione con matrice 4x4** :

per i vettori, conta solo questo

$$f\begin{pmatrix}\gamma_1\\ \gamma_2\\ \gamma_3\\ 0\end{pmatrix} = \begin{bmatrix}\alpha_{11} & \alpha_{12} & \alpha_{13} & \alpha_{14}\\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \alpha_{23} & \alpha_{24}\\ \alpha_{31} & \alpha_{32} & \alpha_{33} & \alpha_{34}\\ 0 & 0 & 0 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\gamma_1\\ \gamma_2\\ \gamma_3\\ 0\end{bmatrix} = \begin{pmatrix}\delta_1\\ \delta_2\\ \delta_3\\ 0\end{pmatrix}$$

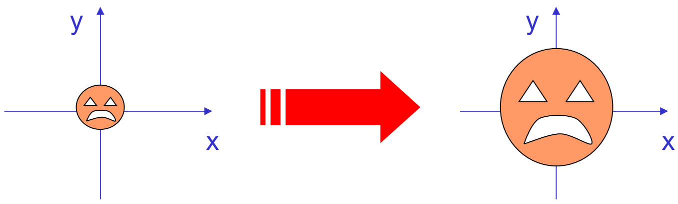
sempre

vettore di partenza in coordinate affini

vettore di arrive in coordinate affini

25

Matrice di trasformazione: scaling isotropico



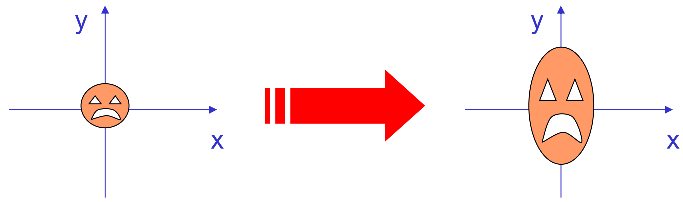
$$f\begin{pmatrix}x\\ y\\ z\\ 1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\gamma\, x\\ \gamma\, y\\ \gamma\, z\\ 1\end{pmatrix} \qquad \begin{bmatrix}\gamma & 0 & 0 & 0\\ 0 & \gamma & 0 & 0\\ 0 & 0 & \gamma & 0\\ 0 & 0 & 0 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x\\ y\\ z\\ 1\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}\gamma\, x\\ \gamma\, y\\ \gamma\, z\\ 1\end{bmatrix}$$

$\mathbf{S}_\gamma$
matrice di scaling isotropico

Cosa succede se la applico $\mathbf{S}_\gamma$ ad un vettore?

26

Matrice di trasformazione: scaling anisotropico



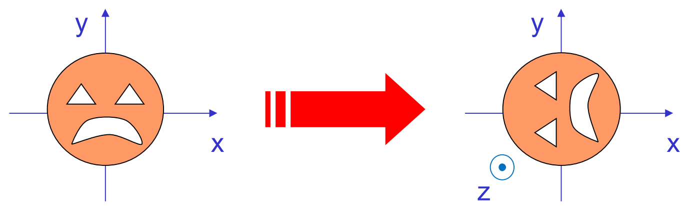
$$f\begin{pmatrix}x\\y\\z\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\gamma_x\, x\\\gamma_y\, y\\\gamma_z\, z\\1\end{pmatrix}$$

$$\begin{bmatrix}\gamma_x & 0 & 0 & 0\\0 & \gamma_y & 0 & 0\\0 & 0 & \gamma_z & 0\\0 & 0 & 0 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x\\y\\z\\1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\gamma_x\, x\\\gamma_y\, y\\\gamma_z\, z\\1\end{bmatrix}$$

$\mathbf{S}_{\gamma_x,\gamma_y,\gamma_z}$
matrice di scaling anisotropico

28

Matrice di trasformazione: rotazione attorno all'asse delle Z



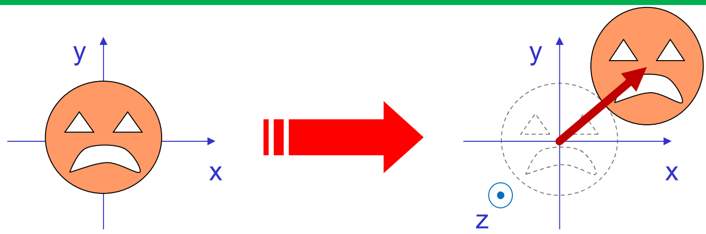
$$f\begin{pmatrix}x\\y\\z\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-y\\x\\z\\1\end{pmatrix}$$

$$\begin{bmatrix}0 & -1 & 0 & 0\\1 & 0 & 0 & 0\\0 & 0 & 1 & 0\\0 & 0 & 0 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x\\y\\z\\1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-y\\x\\z\\1\end{bmatrix}$$

$\mathbf{R}_{z,90°}$
matrice di rotazione di 90° attorno all'asse delle Z

29

Matrice di trasformazione: traslazione



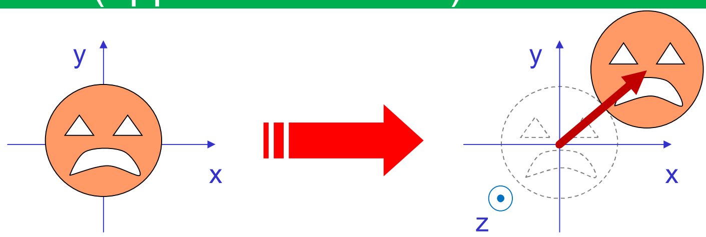
$$f\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x + t_x \\ y + t_y \\ z + t_z \\ 1 \end{pmatrix} \qquad \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & t_x \\ 0 & 1 & 0 & t_y \\ 0 & 0 & 1 & t_z \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x + t_x \\ y + t_y \\ z + t_z \\ 1 \end{bmatrix}$$

$\mathbf{T}_{t_x,t_y,t_z}$

matrice di traslazione
del vettore $\mathbf{t} = (t_x, t_z, t_z)$

31

Matrice di trasformazione: traslazione (applicate ai vettori)



$$f\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ 0 \end{pmatrix} \qquad \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & t_x \\ 0 & 1 & 0 & t_y \\ 0 & 0 & 1 & t_z \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ 0 \end{bmatrix}$$

la stessa matrice
applicata ad un **vettore**
lo lascia invariato
(come ci aspettiamo
da una traslazione)

$\mathbf{T}_{t_x,t_y,t_z}$

matrice di traslazione
del vettore $\mathbf{t} = (t_x, t_y, t_z)$

32

Matrice di trasformazione: traslazione

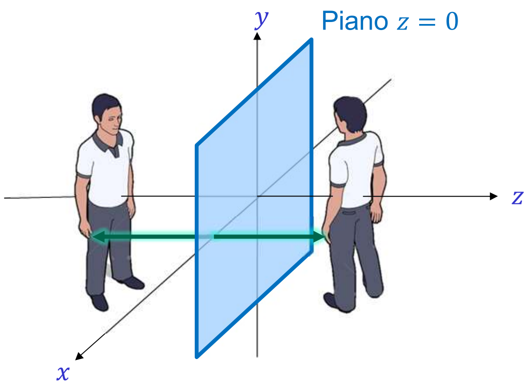
cosa succede quando la applico ad un *vettore* ?

$$f\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ \mathbf{0} \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & \alpha_x \\ 0 & 1 & 0 & \alpha_y \\ 0 & 0 & 1 & \alpha_z \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ \mathbf{0} \end{bmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ \mathbf{0} \end{pmatrix}$$

coerentemente con il comportamento atteso,
“traslare un vettore”
lascia il vettore rimane invariato

33

Matrice di simmetria speculare (planare)



$$f\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ -z \end{pmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x \\ y \\ -z \\ 1 \end{bmatrix}$$

34

Sommario: esempi di trasformazioni affini espresse attraveso le loro matrici 4x4

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & t_x \\ 0 & 1 & 0 & t_y \\ 0 & 0 & 1 & t_z \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$\mathbf{T}_{t_x,t_y,t_z}$

matrice di Traslazione del vettore $\mathbf{t} = (t_x, t_y, t_z)$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$\mathbf{M}_z$

matrice di simmetria (Mirroring) del piano $z = 0$

$$\begin{bmatrix} \gamma_x & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \gamma_y & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \gamma_z & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$\mathbf{S}_{\gamma_x,\gamma_y,\gamma_z}$

matrice di Scaling anisotropico

$$\begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$\mathbf{R}_{z,90°}$

matrice di Rotazione di 90° attorno all'asse delle z

35

Trasformazioni Affini (o lineari)

- ✓ Le trasformazioni esprimibili come una moltiplicazione per una matrice M 4x4 al vettore di coordinate omogenee sono dette «affini»
  - ⇒ L'ultima riga della M è sempre 0,0,0,1, in modo che i punti vengano mappati su punti, e i vettori in vettori
- ✓ E' classe di trasformazioni spaziali particolarmente utile in CG
  - ⇒ (quasi) tutte le trasformazioni spaziali che ci interessano appartengono a questa classe
  - ⇒ Al punto che, in CG, «matrice» (4x4) è praticamente sinonimo di «trasformazione» (spaziale)
- ✓ Comprende tutte le trasformazioni che abbiamo visto fin'ora
  - ⇒ traslazione, scalature uniformi e non, rotazione di 90 gradi attorno a Z, ribaltamenti…

e altre, che vedremo la prossima volta
  - ⇒ Rotazioni in generale, shearing…

36

Trasformazioni Affini

- ✓ Le caratteristiche spaziali di una trasformazione si riflettono nelle caratteristiche matematiche della matrice corrispondente.
- ✓ Ad esempio, il **determinante** della matrice ha una interpretazione geometrica:
  è il fattore di scala dei volumi della trasformazione
  - ⇒ Se prendo un modello 3D di una bottiglia da 2L e gli applico una trasformazione M (cioè trasformo tutti i suoi vertici), la bottiglia risultante sarà avrà una capienza 2·det(M) litri
  - ⇒ Se il determinante è negativo, l'oggetto si «ribalta» specularmente (le cose in *senso orario* diventano antiorario, le scritte disegnate sopra si leggeranno al contrario, etc
  - ⇒ Esercizio: verificare, trovando il determinante delle matrici viste fin'ora
- ✓ Il vantaggio principale di questa rappresentazione delle trasformazioni spaziale consiste nella loro composizione
  - ⇒ Vediamo in che modo

37

Eseguire sequenze di trasformazioni: note

- ✓ Le trasf affini sono chiuse per composizione.

…infatti…

- ✓ La moltiplicazione fra matrici / vettori è associativa

$$\mathrm{M_B} \cdot (\mathrm{M_A} \cdot \mathrm{p}) \;=\; (\mathrm{M_B} \cdot \mathrm{M_A}) \cdot \mathrm{p}$$

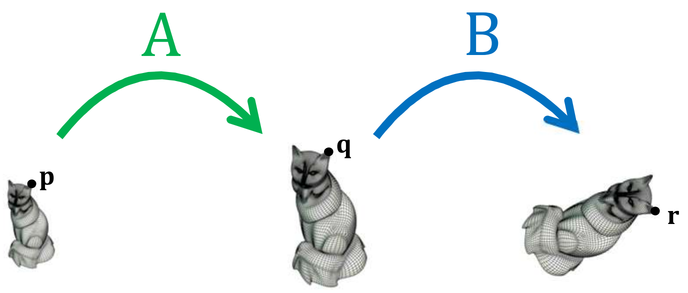
  - ⇒ La matrice $\mathrm{M_A}$ «fa» una data trasf f_A
  - ⇒ La matrice $\mathrm{M_B}$ «fa» una data trasf f_B
  - ⇒ La matrice $(\mathrm{M_B} \cdot \mathrm{M_A})$ «fa» la trasf f_A, seguita da f_B

DOPO PRIMA

- ✓ Cioè: due (oppure n) trasformazioni al prezzo di una!
  - ⇒ Moltiplicando per la matrice $\mathrm{M_C} = \mathrm{M_B} \cdot \mathrm{M_A}$, da sola, ottengo l'effetto che otterrei trasformando con $\mathrm{M_A}$ e $\mathrm{M_B}$ in cascata

38

Composizione di trasnformazioni affini

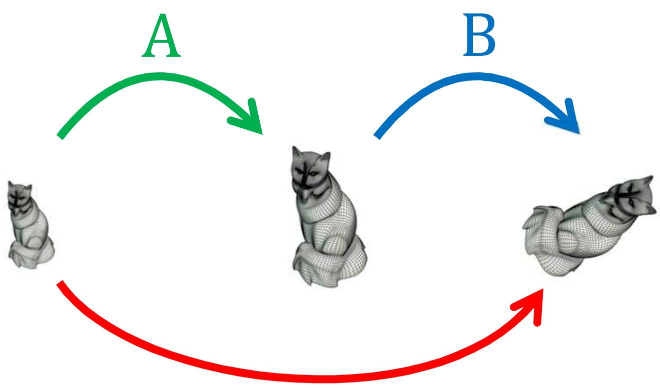


$$\mathbf{q} = A \cdot \mathbf{p}$$

$$\mathbf{r} = B \cdot \mathbf{q} = B \cdot (A \cdot \mathbf{p}) = \overbrace{(B \cdot A)}^{C}\, \mathbf{p}$$

39

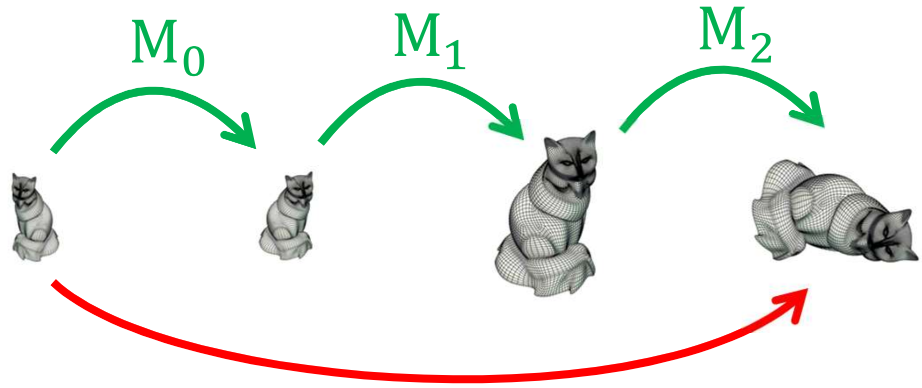
Composizione di trasnformazioni affini



$$\underbrace{B \cdot A}_{C}$$

40

Composizione di trasnformazioni affini

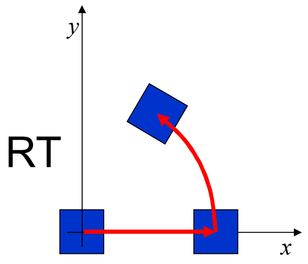


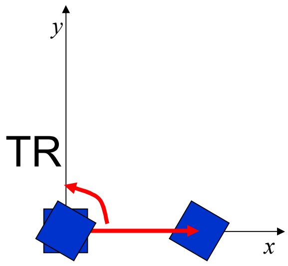
$$\underbrace{M_2 \cdot M_1 \cdot M_0}_{M_{tot}}$$

41

Ripasso: moltiplicazione fra matrici (cioè composizione di trasformazioni)

- ✓ Associativa: $A(BC) = (AB)C$
- ✓ Ma non commutativa! $AB \neq BA$
  - ⇒ previsione:
    determinare il corretto ordine delle trasformazioni non sarà intuitivo





42

Digressione:
in 2D: le trasformazioni affini sono matrici 3x3

✓Punti 2D:

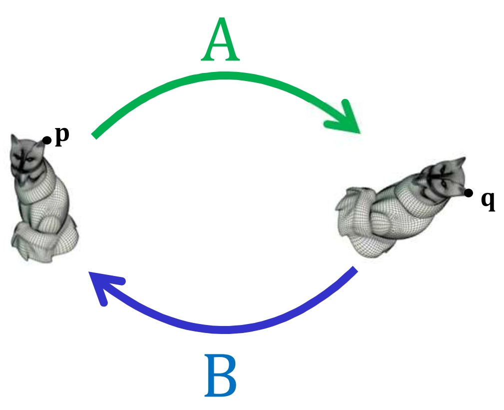
$$\begin{bmatrix} * & * & * \\ * & * & * \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x' \\ y' \\ 1 \end{bmatrix}$$

✓Vettori 2D:

$$\begin{bmatrix} * & * & * \\ * & * & * \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x' \\ y' \\ 0 \end{bmatrix}$$

43

Inversa di una trasformazione



$$\mathrm{B} = \mathrm{A}^{-1}$$

$$\mathbf{q} = \mathrm{A} \cdot \mathbf{p}$$

$$\mathbf{p} = \mathrm{B} \cdot \mathbf{q}$$

44

Calcolo dell'inversa di una matrice di trasformazione affine

- ✓ Potremmo applicare un algoritmo generico di inversione di matrici 4x4
- ✓ molte delle matrici di trasformazioni utili sono però casi particolari che ci consentono di ottenere in modo semplificato (ed efficiente) l'inversa
- ✓ Vediamo per esempio l'inversa delle matrici di: traslazione, scalatura, rotazione, e di composizione di matrici

45

Inversa della matrice di scalatura

matrice di scalatura:

$$\mathbf{S}_{\gamma_x,\gamma_y,\gamma_z} = \begin{bmatrix} \gamma_x & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \gamma_y & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \gamma_z & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

l'inversa è, logicamente:

$$(\mathbf{S}_{\gamma_x,\gamma_y,\gamma_z})^{-1} = \mathbf{S}_{1/\gamma_x,1/\gamma_y,1/\gamma_z} = \begin{bmatrix} 1/\gamma_x & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1/\gamma_y & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1/\gamma_z & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

46

Inversa della matrice di traslazione

matrice di traslazione:
$$\mathbf{T}(\alpha_x,\alpha_y,\alpha_z)=\begin{bmatrix}1&0&0&\alpha_x\\0&1&0&\alpha_y\\0&0&1&\alpha_z\\0&0&0&1\end{bmatrix}$$

l'inversa è, logicamente:

$$\mathbf{T}^{-1}(\alpha_x,\alpha_y,\alpha_z)=\mathbf{T}(-\alpha_x,-\alpha_y,-\alpha_z)=\begin{bmatrix}1&0&0&-\alpha_x\\0&1&0&-\alpha_y\\0&0&1&-\alpha_z\\0&0&0&1\end{bmatrix}$$

47

Inversa di matrice di simmetria speculare

matrice di rotaz di 90° in senso ***antiorario*** attorno all'asse delle z:
$$\begin{bmatrix}0&-1&0&0\\+1&0&0&0\\0&0&1&0\\0&0&0&1\end{bmatrix}$$

l'inversa è, logicamente…

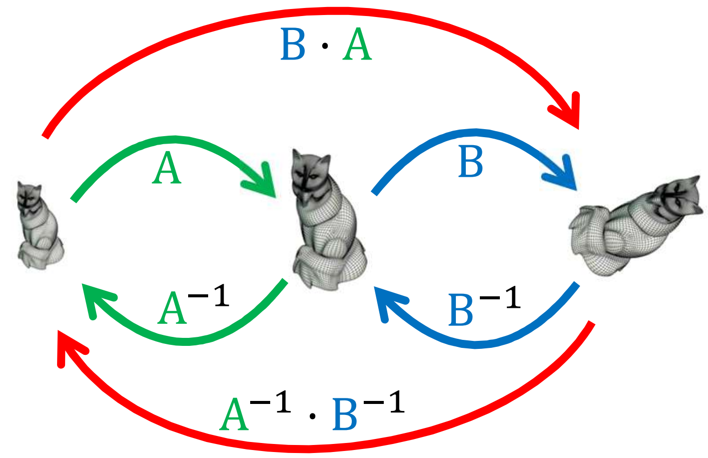
matrice di rotaz di 90° in senso ***orario*** attorno all'asse delle z:
$$\begin{bmatrix}0&+1&0&0\\-1&0&0&0\\0&0&1&0\\0&0&0&1\end{bmatrix}$$

Nota: la matrice inversa è anche la trasposta.
Come vedremo, questo varrà per tutte le matrici di rotazione.

48

Inversa di una composizione di trasformazioni

✓ Attenzione all'inversione: $(B \cdot A)^{-1} = A^{-1} \cdot B^{-1}$

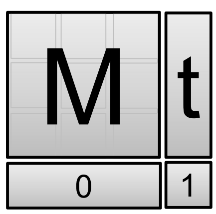


49

La matrice 4x4 corrispondente ad una trasformazione affine: sommario

Questa sottomatrice **M** 3x3 si applica alle coord cartesiane sia dei **punti** che dei **vettori**

Ultima riga: (0,0,0,1)
Così che i **punti** vengano mappati sempre in **punti**, e i **vettori** sempre in **vettori**



Matrice 4x4

Questo vettore **t** si somma al risultato quando trasformo **punti** ma viene annullato (moltiplicato per zero) quando trasformo **vettori**.

50

Alcune caratteristiche numeriche delle matrici 4x4 e loro interpretazione geometrica

- ✓ Matrice inversa = trasformazione inversa
  - ⇒ se esiste (se det ≠ 0)
- ✓ Determinante della matrice 4x4 = (che è anche il determinante della sottomatrice 3x3)
  - ⇒ Moltiplicatore del volume
  - ⇒ Per es, determinante = 0.5: questa matrice riduce i volumi degli oggetti trasformati del 50%
- ✓ Deficit di rango della matrice:
  - ⇒ cioè rango massimo (4) meno rango della matrice
  - ⇒ È la perdita di dimensionalità
  - ⇒ Per es: rango 3 (invece di 4): la trasf. riduce oggetti 3D a oggetti piatti.
  - ⇒ Per es: rango 2 (invece di 4): la trasf. riduce oggetti 3D ad una linea
  - ⇒ Per es: rango 1 (invece di 4): la trasf. riduce oggetti 3D ad un punto
  - ⇒ Se rango < 4: det = 0 (il volume scompare) e la matrice non è invertibile (è «singolare»)

51

Esercizio

- ✓ Comporre (moltiplicare, nell'ordine giusto) una matrice di rotaz di 90 gradi attorno alle z con una matrice di traslazione del vettore (1,2,3) per ottenere la matrice che "ruota-poi-trasla"
  - ⇒ Hai trovato così una matrice di "roto-traslazione"
- ✓ Trovare poi la matrice che ottegno se invece *traslo poi ruoto*
  - ⇒ È la stessa matrice? In cosa differisce dalla prima?

52