Marco Tarini - Computer Graphics 2022/2023
Università degli Studi di Milano

trasformazioni spaziali 2/2

53

Trasf. di rotazione in 2D generica
(attorno all'origine, di un angolo β **generico**, in senso antiorario)

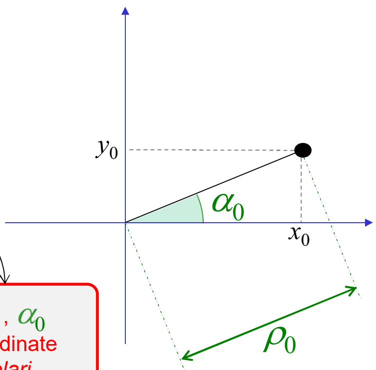
preliminare:coordinate polari
(un diverso modo per
esprimere punti / vettori in 2D)

x_0 , y_0
coordinate *catersiane*

$$\rho_0 = \sqrt{x_0^2 + y_0^2}$$
$$\alpha_0 = atan2(\, y_0 \,,\, x_0 \,)$$

ρ_0 , α_0
coordinate *polari*

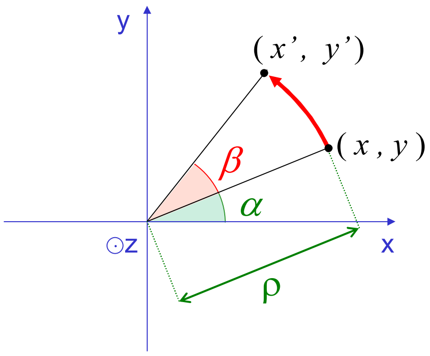
$$x_0 = \rho_0 \cdot \cos(\alpha_0)$$
$$y_0 = \rho_0 \cdot \sin(\alpha_0)$$



54

Trasf. di rotazione in 2D
(attorno all'origine, di un angolo β **generico,** in senso antiorario)

In coordinate polari,
la rotazione sarebbe banale:
l'angolo α incrementa di β,
la distanza ρ rimane invariata



partenza:

$$x = \rho \cos\alpha$$
$$y = \rho \sin\alpha$$

arrivo:

$$x' = \rho\cos(\alpha+\beta) = \rho\cos\alpha\cos\beta - \rho\sin\alpha\sin\beta = x\cos\beta - y\sin\beta$$
$$y' = \rho\sin(\alpha+\beta) = \rho\cos\alpha\sin\beta + \rho\sin\alpha\cos\beta = x\sin\beta + y\cos\beta$$

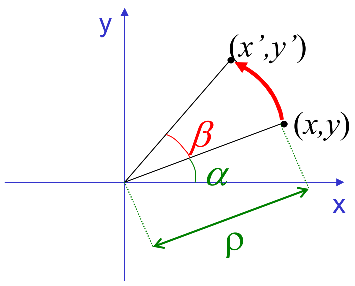
55

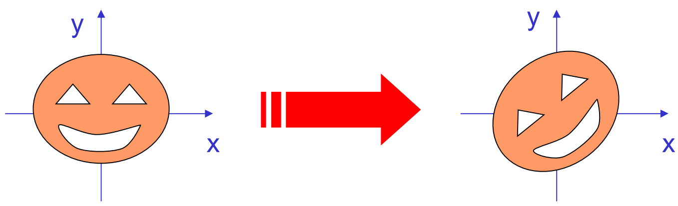
Trasf. di rotazione in 2D
(attorno all'origine, di un angolo β **generico,** in senso antiorario)

Quindi:

$$f\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x\cos\beta - y\sin\beta \\ x\sin\beta + y\cos\beta \end{pmatrix}$$

alla fine, il passaggio alle coord polari serve solo per derivare la formula :-)
Per applicarla, bastano il valore del seno e coseno dell'angolo di rotazione β



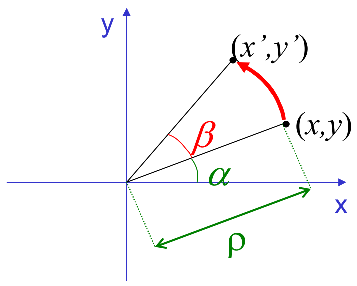


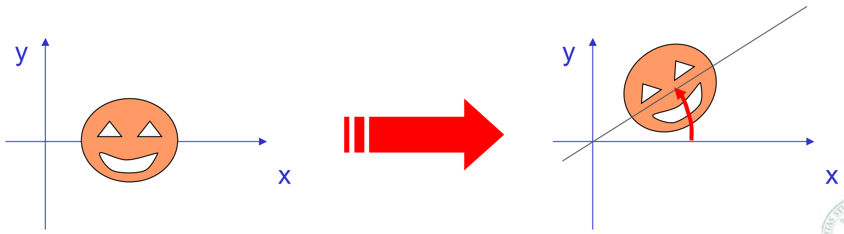
56

Trasf. di rotazione in 2D
(attorno all'origine, di un angolo β **generico**, in senso antiorario)

$$f\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x\cos\beta - y\sin\beta \\ x\sin\beta + y\cos\beta \end{pmatrix}$$

Nota: questa trasformazione
ruota attorno all'origine degli assi
(non certo attorno al centro delle figure)



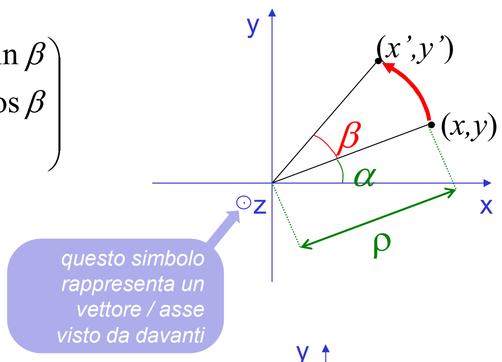


57

Trasf. di rotazione 3D attorno all'asse z
(di un angolo β)

$$f\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x\cos\beta - y\sin\beta \\ x\sin\beta + y\cos\beta \\ z \end{pmatrix}$$

z rimane invariata
solo x e y ruotano

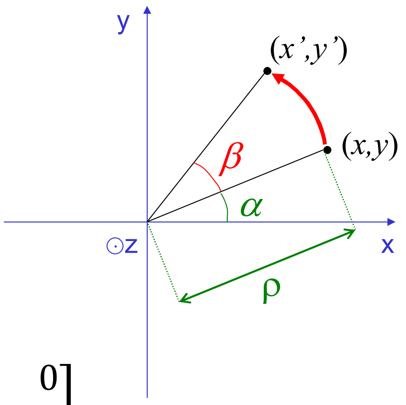


58

Rotazione 3D attorno all'asse z espresso come moltiplicazione con matrice

$$x' = x\cos\beta - y\sin\beta$$
$$y' = x\sin\beta + y\cos\beta$$
$$z' = z$$

$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \\ z' \\ 1 \end{bmatrix} = R_{Z(\beta)} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x\cos\beta - y\sin\beta \\ x\sin\beta + y\cos\beta \\ z \\ 1 \end{bmatrix}$$



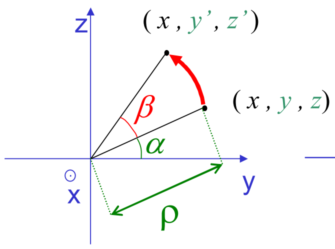
$$R_{Z(\beta)} = \begin{bmatrix} \cos\beta & -\sin\beta & 0 & 0 \\ \sin\beta & \cos\beta & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Matrice di rotazione di angolo β attorno all'asse Z

60

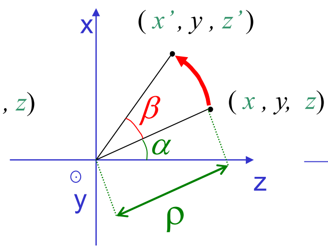
Trasf. di rotazione attorno ad uno dei tre assi

Attorno ad ASSE X



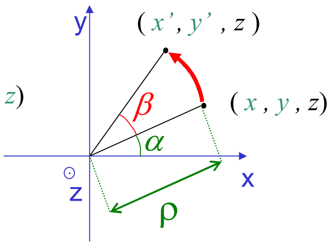
$$f\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y\cos\beta - z\sin\beta \\ y\sin\beta + z\cos\beta \end{pmatrix}$$

Attorno ad ASSE Y



$$f\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} z\cos\beta + x\sin\beta \\ y \\ z\sin\beta - x\cos\beta \end{pmatrix}$$

Attorno ad ASSE Z



$$f\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x\cos\beta - y\sin\beta \\ x\sin\beta + y\cos\beta \\ z \end{pmatrix}$$

61

Matr di Rotazione attorno all'asse x, y, o z

$$R_X(\theta) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\theta & -\sin\theta & 0 \\ 0 & \sin\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$R_Y(\theta) = \begin{bmatrix} \cos\theta & 0 & \sin\theta & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -\sin\theta & 0 & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$R_Z(\theta) = \begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta & 0 & 0 \\ \sin\theta & \cos\theta & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

e le inverse?

$$R_X(\theta)^{-1} = R_X(-\theta) = \underset{\substack{\uparrow \\ \text{(verificare)}}}{=} R_X(\theta)^{\mathrm{T}}$$

62

Rotazioni in 3D: note

- ✓ In 3D,
  bisogna specificare attorno a quale asse ruotare
  - ⇒oltre che, di quanti gradi, per convenzione sul segno: positivo se senso antiorario, nagativo se in senso orario (guardando l’asse dalla punta verso la coda)
- ✓ Si applica nello stesso modo ai punti e ai vettori
  - ⇒la *stessa* funzione viene applicata alle loro coordinate
- ✓ I punti sull’asse vengono mappati su se stessi
  - ⇒e così, i vettori paralleli all’asse
- ✓ Attenzione: cumulare rotazioni in 3D non commuta!
  - ⇒Es: ruotare attorno a X di 90° e poi a Y di 90°
    non è la stessa cosa di
    ruotare attorno a Y di 90° e poi a X di 90°

65

Generalizzare a qualsiasi matrice di rotazione

- ✓ Abbiamo visto solo rotazioni attorno ai tre assi X,Y,Z
- ✓ Possiamo però ottenere matrici di rotazioni attorno ad assi *qualsiasi*:
  - ⇒Le matrici di rotazione attorno ad un asse qualsiasi (anche obliquo) *passante per l'origine* possono essere costruire cumulando in cascata (cioè, moltiplicando le matrici di) tre rotazioni sui tre assi X, Y, Z, con tre angoli opportunamente scelti (non vediamo come scegliere questi angoli)
  - ⇒Le matrici di rotazione per un asse *non* passante per l'origine possono essere ottenute combinando (moltiplcando) rotazioni e traslazioni. *Vediamo come!*

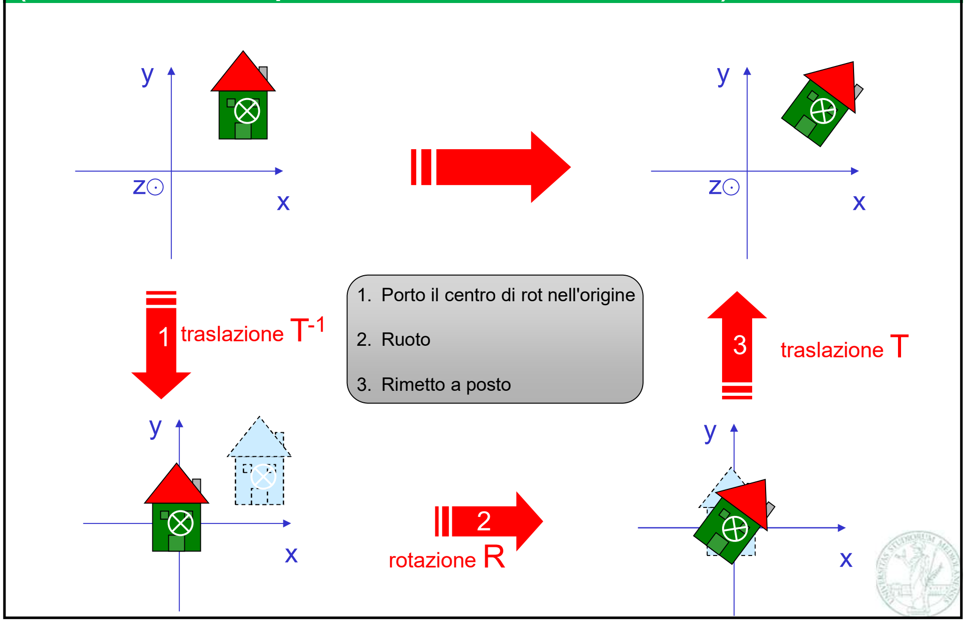
66

Matrici di rotazione

- ✓ Loro inversa: cambiare segno all'angolo $\beta = -\beta$
  $\Longrightarrow$ cambiare il sengo al $\sin\beta$ ($\cos\beta$ rimane invariato)
  $\Longrightarrow$ la matrice si **traspone**
- ✓ L'**inversa** di una matrice di rotazione è la sua **trasposta**
- ✓ Sono dunque matrici «ortonormali» $\mathrm{M} \cdot \mathrm{M}^{\mathrm{T}} = \mathrm{I}$
- ✓ Abbiamo visto solo rotazioni attorno ai tre assi
  - ⇒Come ottenere matrici attorno ad assi qualsiasi? Passante per l'origine?
- ✓ Tutte le matrici di rotazione con asse qualsiasi (anche obliquo) passante per l'origine le posso costruire cumulando tre rotazioni

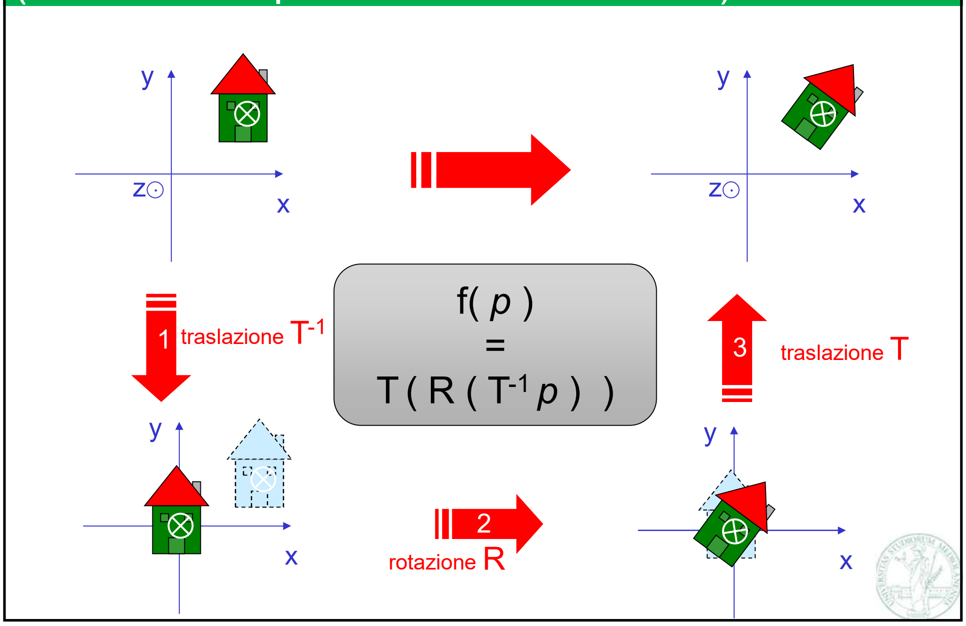
67

Rotazione intorno ad un asse *parallelo* all'asse z (ottenuta componendo trasformazioni)



68

Rotazione intorno ad un asse *parallelo* all'asse z (ottenuta componendo trasformazioni)



69

Rotazione intorno ad un asse *parallelo* all'asse z (ottenuta componendo trasformazioni)

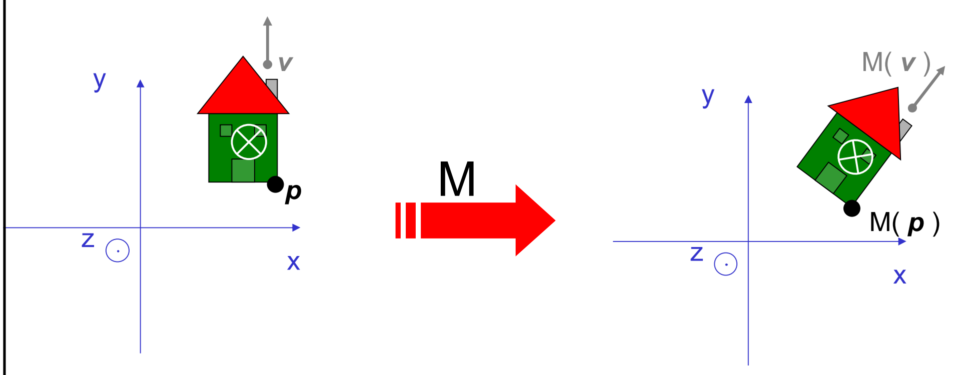
✓ Moltiplicazione matrici (vettori) ha la propretà associativa

$$f(p) = T\,(\,R\,(\,T^{-1}\,p\,)\,)$$
$$= \underbrace{(T\,R\;\;T^{-1})}_{\text{una matrice M 4x4 che fa tutto.}}\,p$$

- considerazioni sull'efficienza
- cosa possiamo dire sulla forma di M ?
- cosa succede se moltiplichiamo un *vettore* per M ?

70

Punti VS vettori



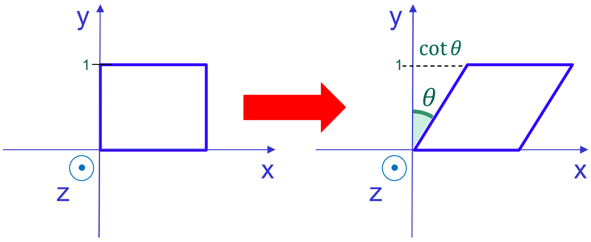
***p* = (* , * , * , 1)** punto all'angolo della casa **(punto)**
***v* = (* , * , * , 0)** velocità vettoriale del fumo **(vettore)**

71

Trasformazione di shearing

✓ Es: spostamento in *x* proporzionale alla pos *y*

$$x' = x + y\cot\theta$$
$$y' = y$$
$$z' = z$$



$$H_{xy}(\theta) = \begin{bmatrix} 1 & \cot\theta & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

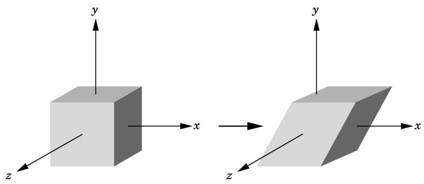
matrice di shearing
(della x rispetto alla y,
di angolo θ)

75

Trasformazione di shearing

✓ Es: spostamento in *x* proporzionale alla pos *y*

$$x' = x + y\cot\theta$$
$$y' = y$$
$$z' = z$$



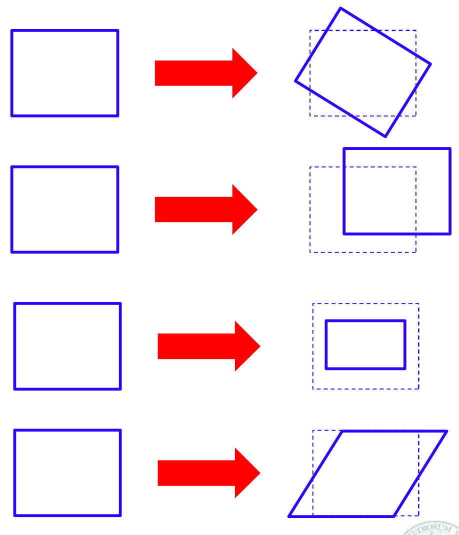
$$H_{xy}(\theta) = \begin{bmatrix} 1 & \cot\theta & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

matrice di shearing
(della x rispetto alla y,
di angolo θ)

76

Lista completa degli effetti geometrici ottenibili con trasformazioni affini

- ✓ Rotazioni
  - ⇒(qualsiasi)
- ✓ Traslazioni
- ✓ Scalature
  - ⇒uniformi o no
  - ⇒compreso ribaltamenti
- ✓ Shearing

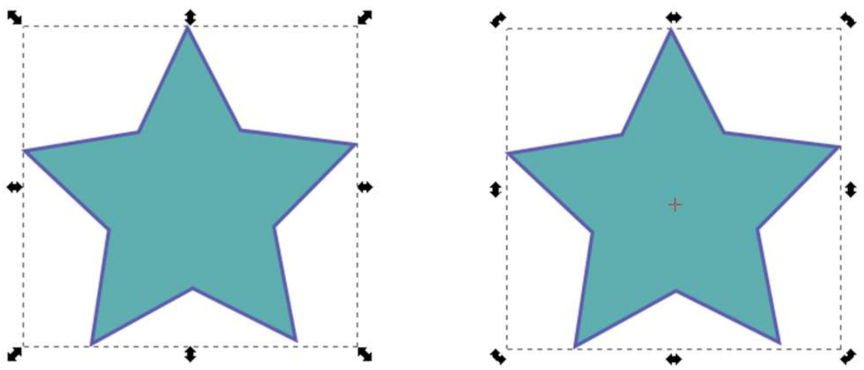


- ✓ … e tutte le composizioni di queste operazioni

77

GUI comuni per specificare trasformazioni affini in 2D (questo esempio: da inkscape)

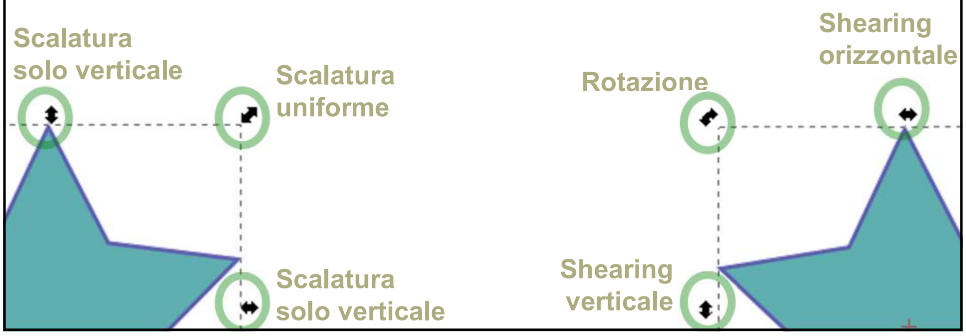
[DEMO]



(più la traslazione con drag-and-drop)
comulando trasformazioni, si possono ottenere tutte le possibili trasf affini in 2D

78

GUI comuni per specificare trasformazioni affini in 2D (questo esempio: da inkscape)



79

Trasformazioni spaziali affini: una definizione eqivalente, e una proprietà

✓ Sono tutte e sole le funzioni **lineari** ,
cioè tali che,
dati un punto $\mathbf{p}$
vettore $\vec{v}$, $\vec{w}$
e uno scalare k:

$$f(\mathbf{p} + k\vec{v}) = f(\mathbf{p}) + kf(\vec{v})$$

$$f(h\vec{v} + k\vec{w}) = h\,f(\vec{v}) + k\,f(\vec{w})$$

⇒ Cioè: trasformare una combinazione lineare di punti (o vettori) (interpolazione compresa) è la stessa cosa di combinare linearmente i punti (o i vettori) trasformati

⇒ Questo è cruciale per la nostra applicazione (rendering basato su rasterizzazione), perché significa che…
… per applicare una trasformazione affine ad un triangolo basta applicarla ai suoi vertici, e poi congiungere i vertici trasformati
… per applicare una trasformazione ad una spline basta calcolare le trasformazioni dei punti di controllo, e poi usarli per la spline trasformata

80

Calcolo dell'inversa di una matrice di trasformazione affine 1/2

- ✓ Per matrici affini generiche, possiamo sfruttare la caratteristica che l'ultima riga è (0,0,0,1) per semplificare il conto dell'inversione
  - ⇒il prob si riduce all'inversione di una matrice 3x3
  - ⇒Vediamo come

81

Calcolo dell'inversa di una matrice di trasformazione affine 2/2

nb:
$(A\,B)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$

$$\begin{bmatrix} M & t \\ 0 & 1 \end{bmatrix}^{-1} = \left(\begin{bmatrix} I & t \\ 0 & 1 \end{bmatrix} * \begin{bmatrix} M & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \right)^{-1} =$$

$$= \begin{bmatrix} M^{-1} & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} * \begin{bmatrix} I & -t \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} M^{-1} & \boxed{M^{-1} * -t} \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

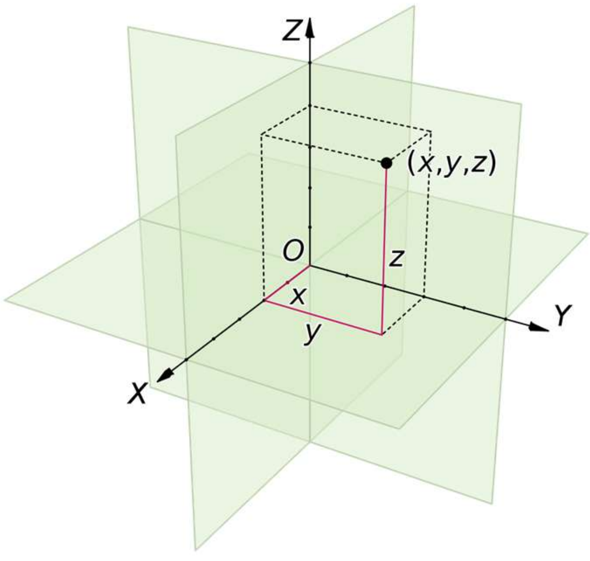
82

Trasformazioni affini come cambi di Sistema di riferimento

- ✓ Fin'ora, abbiamo interpretato le **trasformazioni affini** come azioni che vengono **applicate fisicamente ad oggetti**
  - ⇒ Ad esempio, li spostano, li riorientano nello spazio, li ingrandiscono o riducono, li deformano, etc.
- ✓ Vediamo ora un'utilissima interpretazione alternativa ma matematicamente equivalente, di cosa sia una trasformazione affine (e cosa significhi applicarla):
- ✓ Applicare una trasformazione affine ad un punto / un vettorepuò essere vista come la *conversione* delle coordinate del punto / vettore da un Sistema di Riferimento ad un altro

83

Ripasso: sistema di riferimento (o anche "spazio") in cui esprimere punti e vettori



84

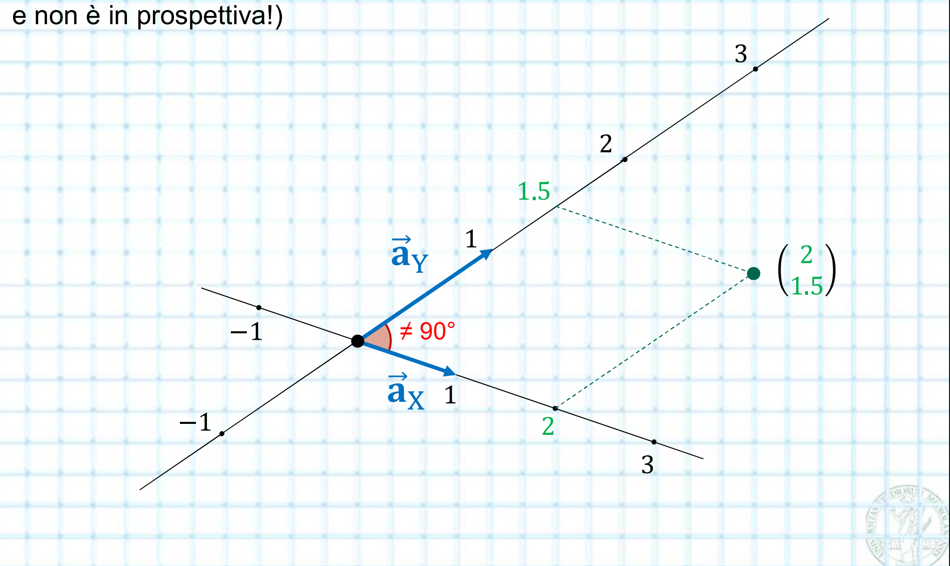
Sistema di riferimento: note

- ✓ Fin'ora, abbiamo tacitamente assunto che il Sistema di riferimento (che usiamo per esprimere sia punti che vettori) fosse quello **canonico**, cioè uno in cui:
  - ⇒ Gli assi sono ortogonali fra loro
  - ⇒ Gli assi hanno la stessa lunghezza, che è unitaria
  - ⇒ L'origine è in (0,0,0)
- ✓ Un **Sistema di Riferimento** in generale (un modo che ci consente di esprimere punti e vettori 3D come triplette di coordinate) può non avere nessuna di queste caratteristiche
  - ⇒ E' sufficiente che gli assi siano linearmente indipendenti, per garantire che ci sia un modo di esprimere qualsiasi punto o vettore

85

Un sistema di riferimento non ortogonale (in 2D)

(Questo disegno è in 2D, e non è in prospettiva!)



86

Sistema di riferimento o *reference frame* (oppure anche: uno *spazio*)

- ✓ Un sistema di riferimento *R* è definito da
  - ⇒ una base vettoriale $\{\vec{a}_x, \vec{a}_y, \vec{a}_z\}$ (gli assi dello spazio)
  - ⇒ un punto di *origine* $\mathbf{p_o}$
- ✓ Posso esprimere (univocamente!) ogni punto $\mathbf{p}$ come:

$$\mathbf{p} = \mathbf{p_o} + x\,\vec{a}_x + y\,\vec{a}_y + z\,\vec{a}_z$$

- ✓ Cioè, in forma matriciale:

coordinate *omogenee* di $\mathbf{p}$ nel sistma di riferimento canonico

$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \\ z' \\ 1 \end{bmatrix} = \overbrace{\begin{bmatrix} \vec{a}_x & \vec{a}_y & \vec{a}_z & \mathbf{p_o} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}}^{\text{sistema di riferimento R}} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ 1 \end{bmatrix}$$

coordinate *omogenee* di $\mathbf{p}$ nel sistema R

Base vettoriale (o spazio vettoriale)

- ✓ Definita da tre vettori asse (linearmente indipendenti)
  - ⇒ $\{\vec{a}_x, \vec{a}_y, \vec{a}_z\}$
- ✓ Posso esprimere (univocamente!) ogni vettore $\vec{v}$ come:

$$\vec{v} = x\,\vec{a}_x + y\,\vec{a}_y + z\,\vec{a}_z$$

- ✓ Cioè:

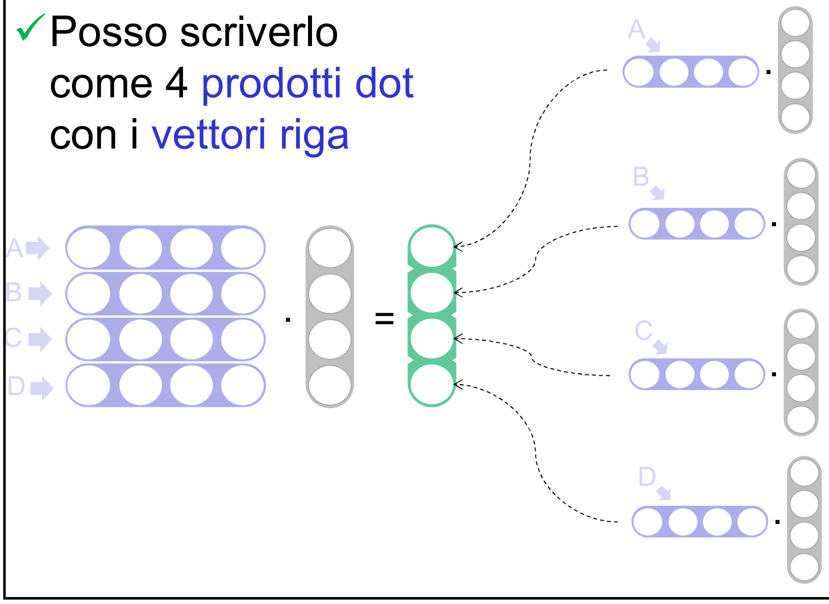
coordinate *omogenee* di $\vec{v}$ nella base canonica

$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \\ z' \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \overbrace{\begin{matrix} \vec{a}_x & \vec{a}_y & \vec{a}_z \end{matrix}}^{\text{Base vettoriale B}} & \overset{\text{Non conta}}{*} \\ \begin{matrix} 0 & 0 & 0 \end{matrix} & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ 0 \end{bmatrix}$$

coordinate *omogenee* di $\vec{v}$ nella base del sistema B

Ripasso: prodotto Matrice × Vettore («riga per colonna»)

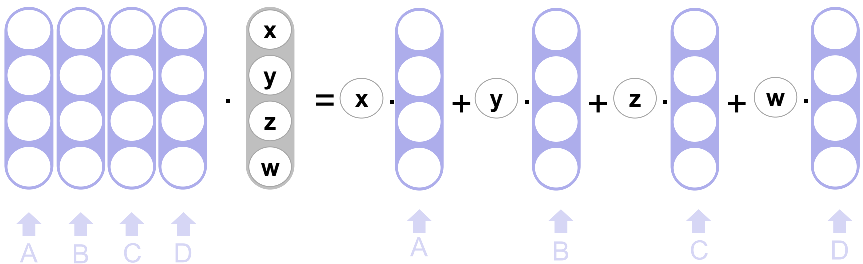
✓ Posso scriverlo come 4 prodotti dot con i vettori riga



91

Ripasso: prodotto Matrice × Vettore («riga per colonna»)

✓ Ma posso anche scriverlo come: una combinazione lineare dei vettori colonna



92

Cambio di Sistema di riferimento (o spazio)

- Ogni trasformazione affine può essere interpretata come un *cambio di sistema di riferimento (o spazio)*
- e le 4 colonne della matrice riportano
  - ⇒3 assi
  - ⇒origine

  dello spazio di partenza
  descritte nelle coordinate dello spazio di arrivo

93

Sistema di riferimento canonico (quello che abbiamo tacitamente assunto finora)

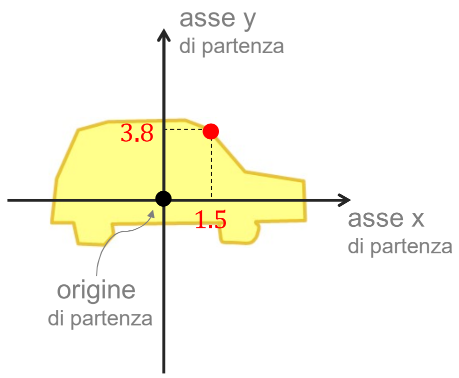
- Assi: $\vec{a}_x = (1,0,0)$
  $\vec{a}_y = (0,1,0)$
  $\vec{a}_z = (0,0,1)$
- Origine: $\mathbf{p_o} = (0,0,0)$
- Quindi, matrice associata: $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = I$

94

Es: traslazione

$$\begin{bmatrix} +1 & 0 & 0 & +7 \\ 0 & +1 & 0 & +3 \\ 0 & 0 & +1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & +1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1.5 \\ 3.8 \\ 0.0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 8.5 \\ 6.8 \\ 0.0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

matrice per passare dallo spazio di partenza allo spazio di arrivo

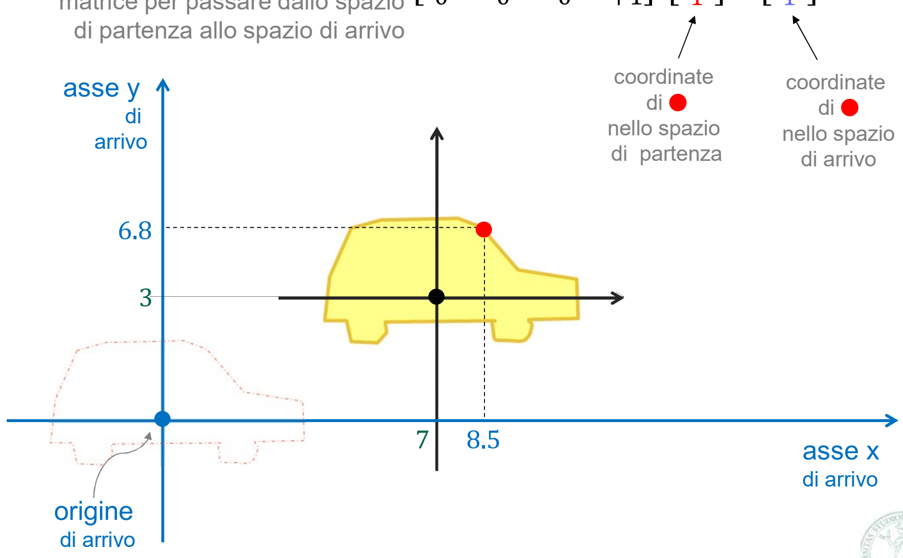


96

Es: traslazione

$$\begin{bmatrix} +1 & 0 & 0 & +7 \\ 0 & +1 & 0 & +3 \\ 0 & 0 & +1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & +1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1.5 \\ 3.8 \\ 0.0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 8.5 \\ 6.8 \\ 0.0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

matrice per passare dallo spazio di partenza allo spazio di arrivo



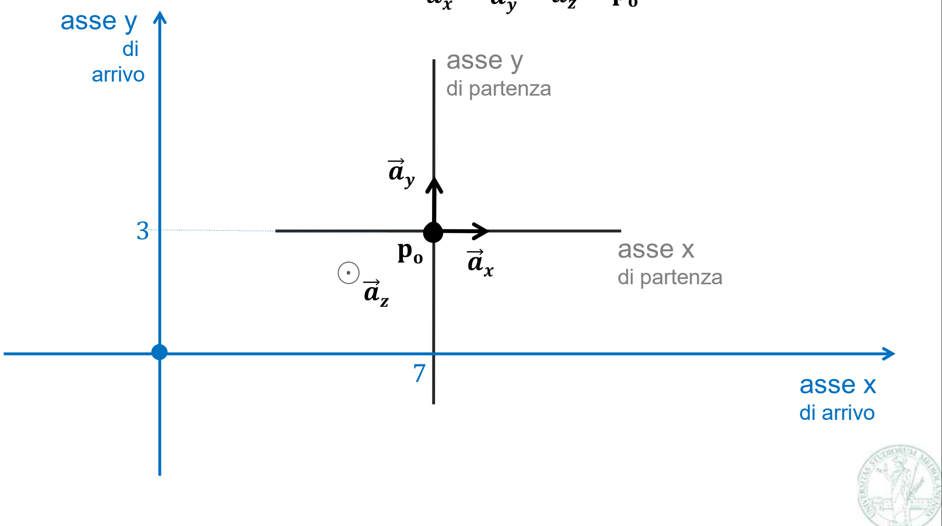
97

Es: traslazione

$$\begin{bmatrix} +1 & 0 & 0 & +7 \\ 0 & +1 & 0 & +3 \\ 0 & 0 & +1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & +1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1.5 \\ 3.8 \\ 0.0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 8.5 \\ 6.8 \\ 0.0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{matrix} \Uparrow & \Uparrow & \Uparrow & \Uparrow \\ \vec{a}_x & \vec{a}_y & \vec{a}_z & \mathbf{p_o} \end{matrix}$$

matrice per passare dallo spazio di partenza allo spazio di arrivo



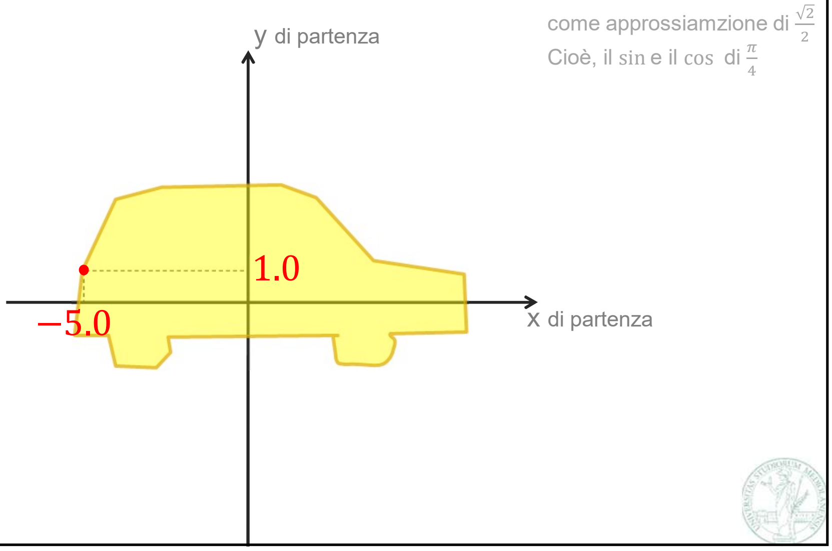
98

Es: rot di 45° su Z

$$\begin{bmatrix} +0.7 & -0.7 & 0 & 0 \\ +0.7 & +0.7 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & +1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & +1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -5.0 \\ 1.0 \\ 0.0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -4.4 \\ -2.8 \\ 0.0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

matrice per passare dal frame di partenza al frame di arrivo

Il valore 0.7 qui è inteso come approssiamzione di $\frac{\sqrt{2}}{2}$
Cioè, il $\sin$ e il $\cos$ di $\frac{\pi}{4}$



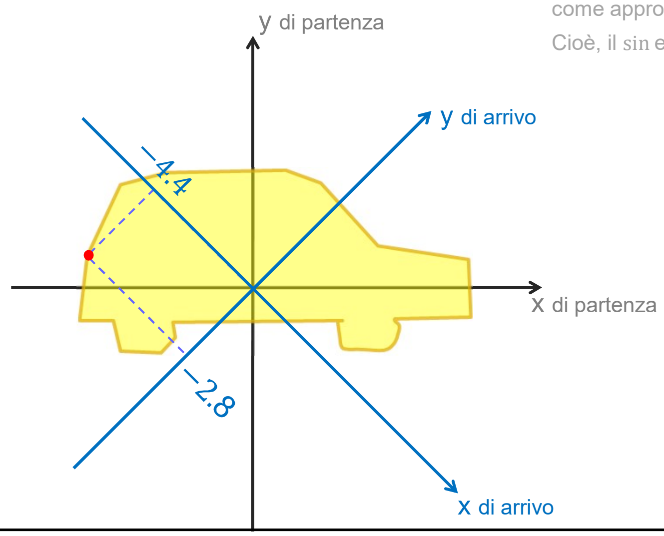
99

Es: rot di 45° su Z

$$\begin{bmatrix} +0.7 & -0.7 & 0 & 0 \\ +0.7 & +0.7 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & +1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & +1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -5.0 \\ 1.0 \\ 0.0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -4.4 \\ -2.8 \\ 0.0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

matrice per passare dal frame di partenza al frame di arrivo

Il valore 0.7 qui è inteso come approssiamzione di $\frac{\sqrt{2}}{2}$ Cioè, il $\sin$ e il $\cos$ di $\frac{\pi}{4}$

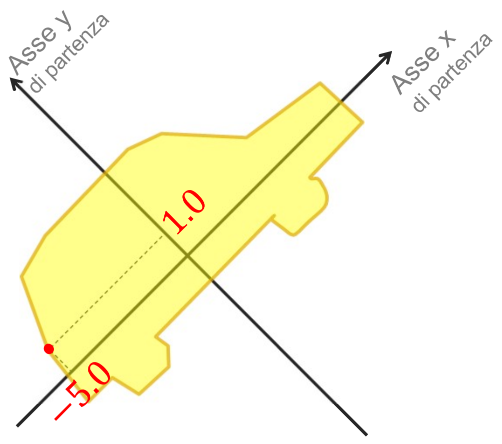


100

Es: rot di 45° su Z

$$\begin{bmatrix} +0.7 & -0.7 & 0 & 0 \\ +0.7 & +0.7 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & +1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & +1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -5.0 \\ 1.0 \\ 0.0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -4.4 \\ -2.8 \\ 0.0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

matrice per passare dal frame di partenza al frame di arrivo



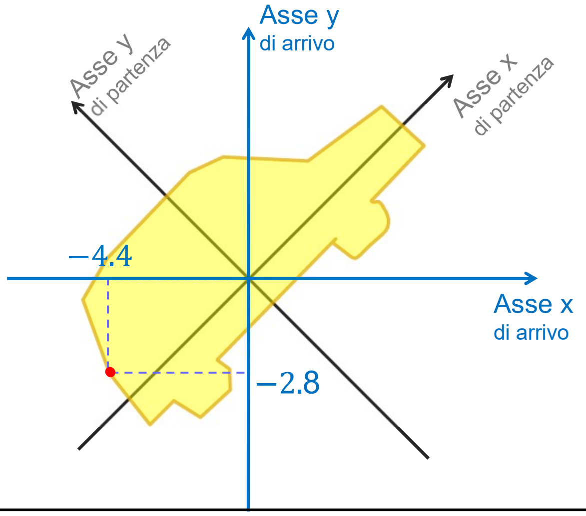
Stesso esempio, ma questa volta «visto dalla prospettiva del sistema di riferimento di arrivo»

101

Es: rot di 45° su Z

$$\begin{bmatrix} +0.7 & -0.7 & 0 & 0 \\ +0.7 & +0.7 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & +1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & +1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -5.0 \\ 1.0 \\ 0.0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -4.4 \\ -2.8 \\ 0.0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

matrice per passare dal frame di partenza al frame di arrivo



Stesso esempio, ma questa volta «visto dalla prospettiva del sistema di riferimento di arrivo»

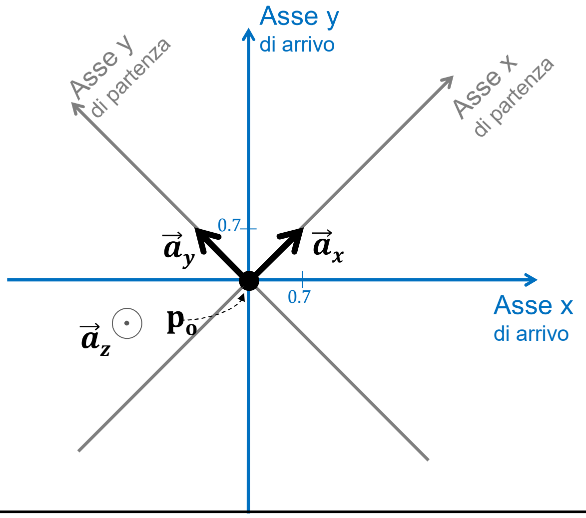
102

Es: rot di 45° su Z

$$\begin{array}{cccc} & & & \\ \end{array}\begin{bmatrix} +0.7 & -0.7 & 0 & 0 \\ +0.7 & +0.7 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & +1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & +1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -5.0 \\ 1.0 \\ 0.0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -4.4 \\ -2.8 \\ 0.0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{array}{cccc} \Uparrow & \Uparrow & \Uparrow & \Uparrow \\ \vec{a}_x & \vec{a}_y & \vec{a}_z & \mathbf{p_o} \end{array}$$

matrice per passare dal frame di partenza al frame di arrivo

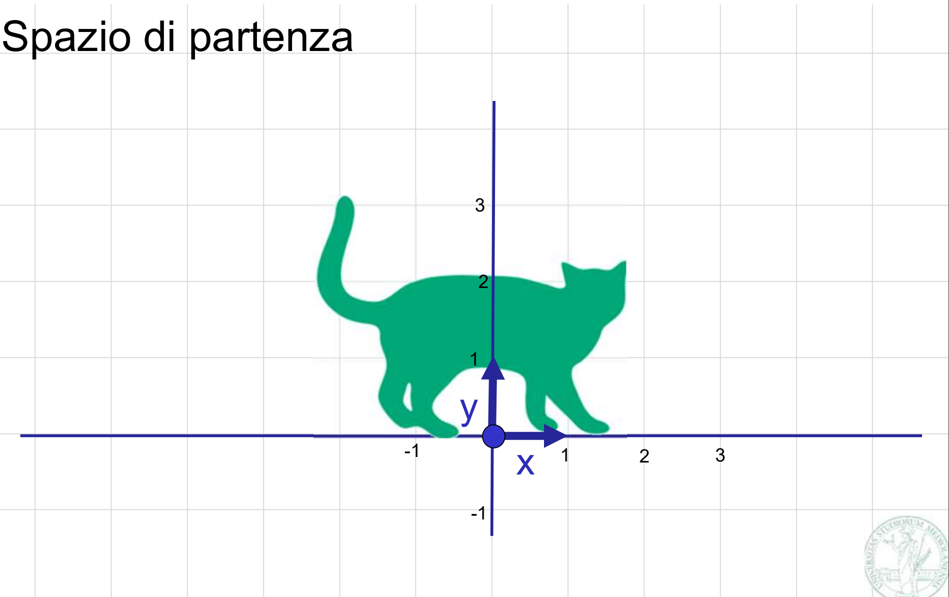


Stesso esempio, ma questa volta «visto dalla prospettiva del sistema di riferimento di arrivo»

103

Esempio (disegno è sul piano Z = 0)

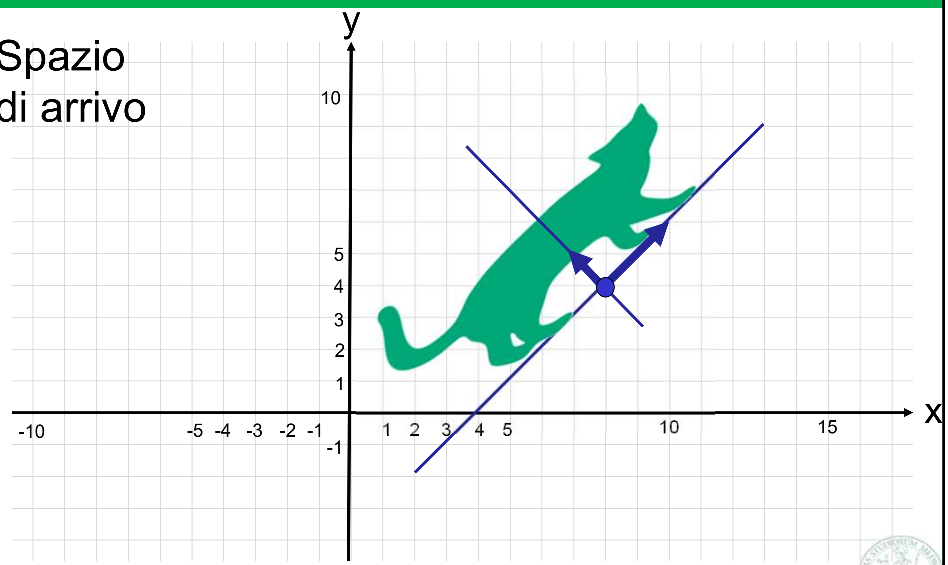
Spazio di partenza



107

Esempio (il disegno è sul piano Z = 0)

Spazio di arrivo



108

Note sull'esempio

- ✓ Per passare dallo spazio di partenza a quello di arrivo, abbiamo sottoposto il gatto ad una sequenza di trasformazioni spaziali
  - ⇒ Giudicando ad occhio, il gatto è stato… (in sequenza)
    1. scalato anisotropicamente
       (schiacciato verticalmente e allungato orizzontalmente),
    2. poi, ruotato di 45° in senso ccw attorno asse z
    3. poi, traslato
- ✓ Sarebbe possibile ottenere la matrice di trasformazione complessiva moltiplicando tutte le matrici associate a ciascuna della trasformazioni applicate (da desta a sinistra) e ottenendo una matrice complessiva M
- ✓ Questa matrice M applica in un colpo solo tutte le trasformazioni
- ✓ (Potremmo anche immaginarci diverse sequenze di trasformazioni che ottengono l'effetto mostrato: il loro prodotto matriciale otterrebbe sempre la stessa matrice M)

109

Note sull'esempio

- ✓ Un metodo alternativo
  (equivalente, ma a volte più semplice)
  di capire il valore della matrice M ,
  è guardare direttamente il suo effetto complessivo,
  trascrivendo, nelle sue 4 colonne,
  i tre assi x,y,z (vettori) e l'origine (punto),
  del sistema di riferimento originale (in blu), espressi
  in coordinate affini
  (cioè cartesiane, e 0 o 1 come coordinata w)
  nel sistema di riferimento di arrivo (in nero).

110

Esercizio

1. Scrivi la matrice che porta dallo spazio di partenza mostrato allo spazio di arrivo mostrato
   - ⇒ Come: riporta nelle colonne della matrice le coordinate (omogenee) dei vettori asse, e del punto origine, del Sistema di riferimento di partenza, come li vedi nel Sistema di riferimento di arrivo
2. Applica la matrice trovata al punto $\mathbf{p}$,
   che nello spazio di partenza
   ha coordinate cartesiane (-2,3,0)
   - ⇒ come si vede dal primo disegno: è l'estermità della coda
3. *Hai ottenuto:* le coordinate $\mathbf{p}$' dello stesso punto nello spazio di arrivo
   - ⇒ Verifica sul secondo disegno

111

Esercizio 2

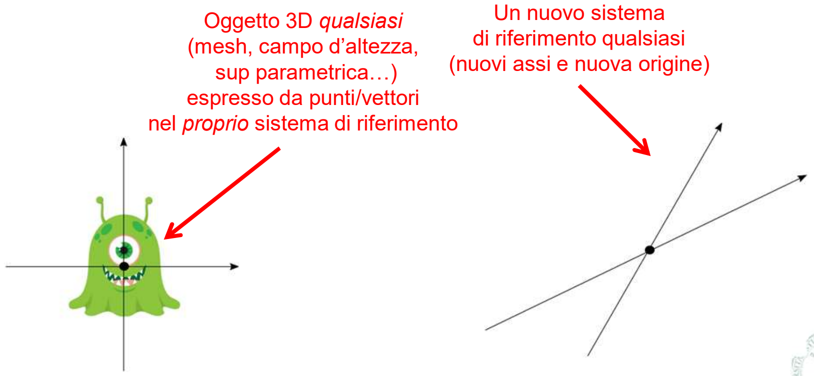
"Una mosca si poggia a coordinate (nel Sistema di riferimento di arrivo) (9,8,0). In quale punto del Sistema di riferimento di partenza si trova la mosca?"

1. Inverti la matrice del punto precedente
   - ⇒ facendo alcuni conti, oppure avvalendoti di un software di appoggio, per es https://matrix.reshish.com/inverse.php)
2. Applica la matrice inversa al punto di coordinate
   che, nel Sistema di Riferimento di arrivo (9,8,0)
   - ⇒ *come si vede dal secondo disegno:*
     corrisponte ad punto che è, circa, collocato sul naso del gatto
3. Hai ottenuto le coordinate dello stesso punto nel Sistema di riferimento di partenza
   - ⇒ verifica sul primo disegno

112

Un modo di interpretare qualsiasi trasformazione affine: sommario

- ✓ In pratica, una trasfromazione affine si limita a ridefinire un nuovo sistema di rifermimento arbitario
  - ⇒ 3 assi + origine
- ✓ L'oggetto 3D segue il nuovo sistema di riferimento



113

Un modo di interpretare qualsiasi trasformazione affine: sommario

- ✓ In pratica, una trasfromazione affine si limita a ridefinire un nuovo sistema di rifermimento arbitario
  - ⇒ 3 assi + origine
- ✓ L'oggetto 3D segue il nuovo sistema di riferimento

114