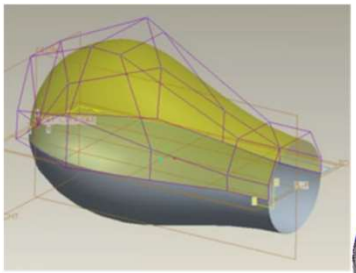
Una (imperfetta) categorizzazione dei tipi di modelli digitali 3D

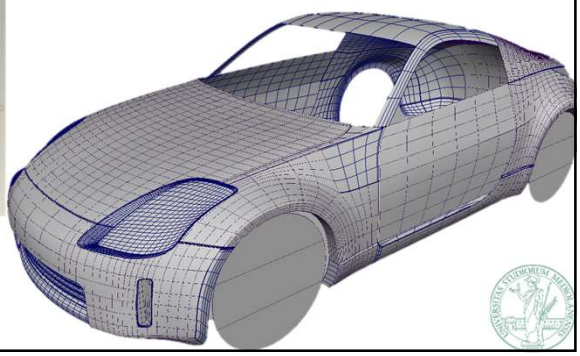
		ELEMENTI DISCRETI			CONTINUI
		regolari *«a griglia»*	semi-regolari o irregolari		
			elementi simpliciali	elementi non simpliciali	
SUPERFICIALI	2-manifold *«rappresenta una vera superficie»*	**Height Field** **Range Scan** **Geometry Images**	**Triangle Mesh**	**Polygonal Mesh** **Quad Mesh** **Quad dominant Mesh**	**Subdivision surfaces** **Parametric Surfaces**
	non-manifold *«non rappresenta una sup»*	**Set di Range Scan**	**Point Cloud**		
VOLUMETRICI	(3-manifold)	**Voxelized Volume** **Volumetric Textures**	**Tetra Mesh**	**Hexa Mesh**	**Implicit models** **(es. CSG)**

3

Superfici parametriche

- ✓ Modo di rappresentare superfici curve
- ✓ Non solo «lineari a tratti» (come le mesh) ma «quadratiche (o cubiche, o quartiche) etc. a tratti»
- ✓ Molto utilizzato per CAD/CAM

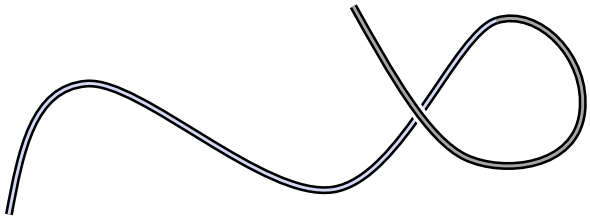




4

Curve parametriche

- ✓ Vediamo prima un caso più semplice (ma pure molto usato): le curve parametriche
  - ⇒ Una rappresentazione per linee curve (in 2D o 3D)
- ✓ Il caso superfici sarà una sua generalizzazione



5

Miniripasso su terminologia delle funzioni in generale

Una funzione — Il dominio di f — Il codominio di f

$$f: \mathrm{A} \to \mathrm{B}$$

$$f(a) = b$$

$a \in \mathrm{A}$ — $b \in \mathrm{B}$

Immagine di f :
insieme di elementi del codominio di f raggiunti da f

$$\text{immagine}(f) = \{b \in \mathrm{B} \,.\, \exists\, a \in \mathrm{A}. f(a) = b\}$$

Esempio: $f: \mathbb{N} \to \mathbb{N}, \quad f(x) = 2x$
dominio di f : numeri naturali
codominio di f : numeri naturali
immagine di f : numeri naturali pari

7

Curva parametrica

- ✓ Curva descritta come immagine di una funzione

$$f: \mathrm{A} \rightarrow \mathrm{B}$$
$$\mathrm{A} \subseteq \mathbb{R}$$
$$\mathrm{B} = \mathbb{R}^2 \; o \; \mathbb{R}^3$$

- ✓ $\mathrm{B} = \mathbb{R}^2$ curve in 2D
  (linee curve disegnte su di un foglio) $\quad f(t) = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$
- ✓ $\mathrm{B} = \mathbb{R}^3$ curve in 3D
  (linee curve che "fluttuano" nello spazio) $\quad f(t) = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$

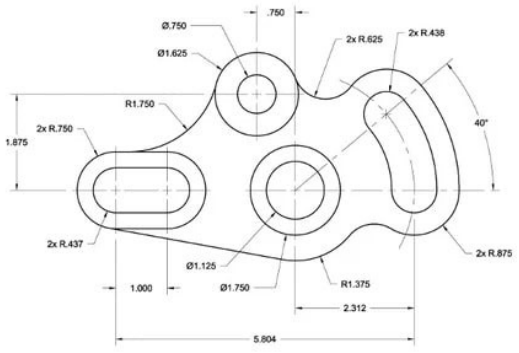
⇒ La curva è quindi "l'immagine di una funzione da $\mathbb{R}$ a $\mathbb{R}^2$ (o $\mathbb{R}^3$)"

- ✓ t è detto il parametro, o la posizione parametricha
- ✓ A, il dominio di f , è detto il "dominio parametrico"
- ✓ B, l'immagine di f , è la nostra curva (un luogo di punti)
- ✓ Se $f(t)$ è un polinomio di t, la curva di dice polinomiale

8

Usi delle curve parametriche: in 2D

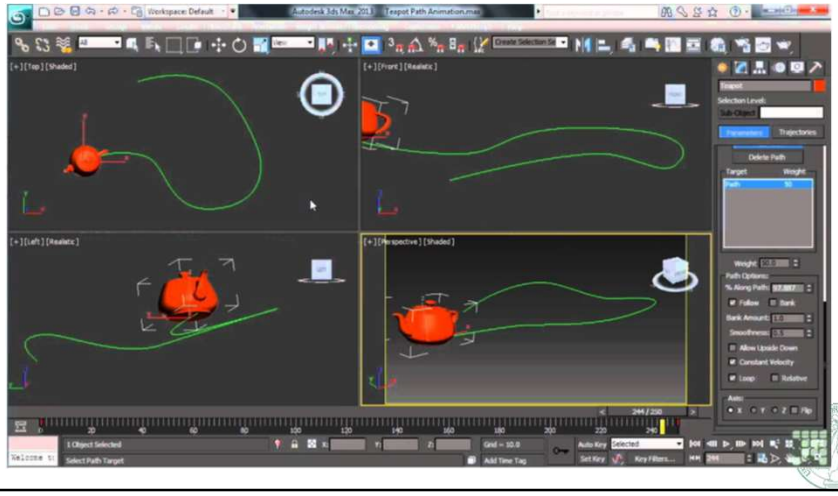
- ✓ Design di grafica vettoriale, come CAD 2D



9

Usi delle curve parametriche: in 2D o 3D

- ✓ in Computer Animation: rappresenta la traiettoria di un oggetto
  - ⇒ la coordinata parametrica t rappresenta il tempo
  - ⇒ $f(t)$ = la posizione dell'oggetto al tempo t

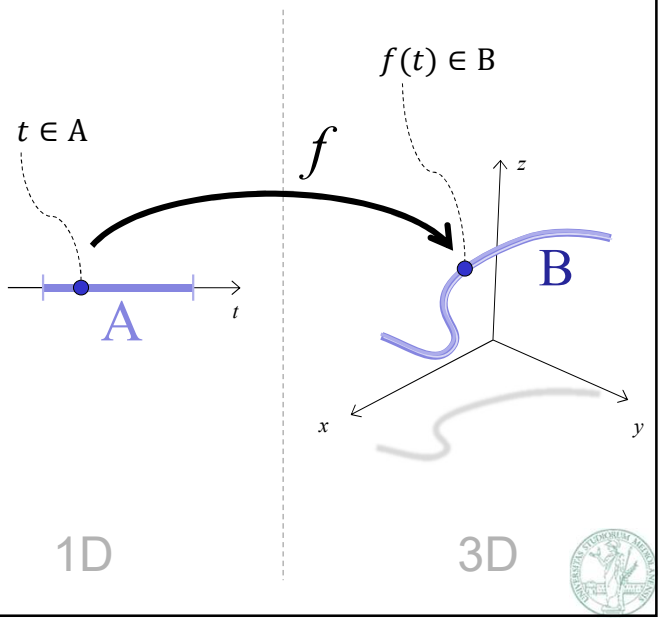


11

Curva parametrica

$$f: \mathrm{A} \rightarrow \mathrm{B}$$
$$\mathrm{A} \subseteq \mathbb{R}$$
$$\mathrm{B} \subseteq \mathbb{R}^3$$

$$f(t) = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$



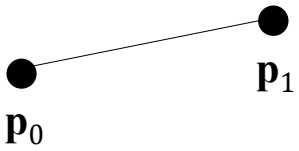
12

Esempio giocattolo:

- ✓ Un segmento dritto come “curva” parametrica
  - ⇒ (in questo caso, non è «curva», cioè non ha curvatura)
  - ⇒ Il segmento fra due punti $\mathbf{p}_0$, $\mathbf{p}_1$ è il luogo di punti raggiunti dalla funzione

$$f(t) = \mathbf{p}_0 \cdot (1 - t) + \mathbf{p}_1 \cdot t$$

$$= \mathbf{p}_0 + (\mathbf{p}_1 - \mathbf{p}_0) \cdot t$$



14

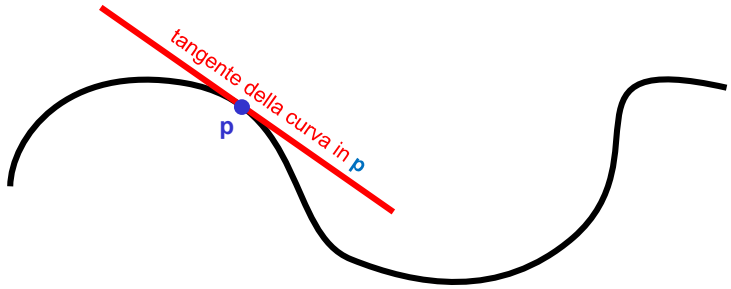
Note sull’esempio giocattolo…

- ✓ In questo esempio, *ed anche in generale*…
  - ⇒ i punti $\mathbf{p}_0$ e $\mathbf{p}_1$ sono costanti nella formula di f
  - ⇒ sono detti i «**punti di controllo**» della curva: modificandoli, modifico la forma della curva
- ✓ in questo esempio… (ma in generale, non sarà sempre così)
  - ⇒ La curva è un polinomio **lineare**, cioè di grado 1 (in generale, si usano polinomi di grado superiore)
  - ⇒ la curva passa *attraverso* i due punti di controllo
  - ⇒ i punti di controllo sono solo 2
  - ⇒ i punti di controllo sono l’inizio e la fine della curva
  - ⇒ la direzione tangente è **costante** per ogni *t,* (calcolarla!) cioè la «curva» non è… curva (è dritta, non è incurvata)
- ✓ Vedremo esempi di grado superiore

15

Curve paramteriche: quale direzione tangente?

- ✓ Data una curva e un punto **p** su di essa, la retta tangete è la retta che è passa per **p** e ha lo stesso orientamento della curva in **p**
- ✓ La direzione tangente è la direzione della retta tangente



- ✓ Vediamo come calcolare la direzione tangente per un dato punto su di una curva parametrica
  - ⇒ Esercizio: applica poi la regola per trovare la dir tangente nell'esempio giocattolo, e verifica che la risposta è quella che ci si aspetterebbe

17

Curve paramteriche: quale direzione tangente?

- ✓ Dato un parametro t , il punto $f(t)$ è sulla curva (per costruzione).
- ✓ Quale vettore è tangente della curva in quel punto?
- ✓ Dobbiamo chiederci di quanto si sposta il punto $f(t)$ quando t incrementa di un piccolo delta ε
- ✓ Risposta:
  - ⇒ si sposta nel punto $f(t+\varepsilon)$
  - ⇒ cioè si sposta del vettore $f(t+\varepsilon) - f(t)$
  - ⇒ dividendo per ε, ottengo lo spostamento (ancora un vettore) per *unità di incremento* della variabile parametrica t

$$\frac{f(t+\varepsilon) - f(t)}{\varepsilon}$$

  - ⇒ il limite con $\varepsilon \to 0$ è il vettore tangente che cerco
  - ⇒ cioè la derivata f' di f calcolata in t : $f'(t)$
  - ⇒ Se normalizzo, ottengo la direzione (vettore unitario)

$\frac{f'(t)}{\|f'(t)\|}$ = direzione tangente della curva nel punto $f(t)$

18

Lo zoo delle curve parametriche

- ✓ Sono stati proposti diverse funzione, come:
  - ⇒ Hermite Splines
  - ⇒ Bézier splines ← vediamo queste
  - ⇒ B-splines
  - ⇒ NURBS (polinomi razionali)
- ✓ Differiscono in:
  - ⇒ La formula che definisce f
  - ⇒ Se la curva è interpolativa o approssimativa
  - ⇒ Se la curva è una spline, cioè se è una f è formula polinomiale in t
  - ⇒ Il grado di continuità

21

Spline

- ✓ E' una curva polinomiale "a tratti"
  - ⇒ Di un certo grado n
- ✓ Cioè è l'unione di un certo numero di pezzi, detti **archi**, uniti alle esteremità ciascuno dei quali è una curva parametrica polinomiale di un grado n ← Nell'esempio giocattolo, $n = 1$, ma normalmente, $n > 1$
- ✓ Una spline è controllata attraverso un insieme di **punti di controllo**
  - ⇒ si dice "approssimante" se ci passa "vicino" : i punti di controllo attirano a sè la curva
  - ⇒ si dice "interplante" se ci passa attaverso La curva "interpola" i punti di controllo
- ✓ Vediamo ora un esempio importante di Spline: le curve di Bézier

22

Spline

- ✓ E' una curva polinomiale a tratti
  - ⇒ Di un certo grado *n*

Nell'esempio giocattolo, n = 1, ma normalmente, n>1

- ✓ Una spline è controllata attraverso un insieme di **punti di controllo**
  - ⇒ Si dice "approssimante" se ci passa "vicino" I punti di controllo attirano a sè la curva
  - ⇒ Si dice "interplante se ci passa attaverso La curva "interpola" i punti di controllo

nota: non si tratta di una interpolazione *lineare* come quelle abbiamo visto

- ✓ Una spline è divisa in **archi**.
- ✓ Ogni punto su ogni arco sarà una certa interpolazione lineare dei punti di controllo
  - ⇒ i pesi sono un **polinomio** P(t), di grado *n* >1
  - ⇒ *n* è il grado della spline (che quindi può essere quadratica, cubica, etc)
- ✓ Vediamo ora un esempio importante: le curve di Bézier

23

Curve di Bézier: note 1/2

- ✓ Sono una famiglia di splines di grado *n* qualsiasi
  - ⇒ La linea spezzata vistà è una curva di Bézier di grado 1,
  - ⇒ Vediamo ora come si generalizza
- ✓ Alcune caratteristiche:

Verificale per il grado 1

  - ⇒ Una curva di Beziér è composta da archi di Beziér (giunti alle estermità)
  - ⇒ Un arco di Beziér di grado *n* è controllato da *n*+1 punti di controllo
  - ⇒ L'arco è interpolante (passa attraverso) il primo e l'ultimo di questi punti, ma in generale non gli altri (la curva è solo approssimante per loro)
  - ⇒ Quindi, per rendere la curva continua («disegnabile senza staccare la penna dal foglio») basta far coincidere l'ultimo punto di controllo di un arco col primo dell'arco successivo

24

Curve di Bézier: note 2/2

- ✓ Le curve di Beziér cubiche (n=3) sono le più usate
  - ⇒ Vedremo presto perché
- ✓ Ci sono due modi equivalenti di definire un arco di curva di Beziér (di grado n):
  - ⇒ Formulazione matematica originale, i cui pesi dei punti di controllo sono un certo polinomio di t (anni '50, Pierre Beziér)
  - ⇒ Formulazione «grafica»: algoritmo di DeCasteljau
  - ⇒ (vedremo questa seconda scelta)
- ✓ Cenni storici:
  - ⇒ le curve di Beziér sono nate per progettare le fusoliere delle automobili.

25

Formulaz. di De Casteljau: esempio per grado 2

- ✓ Ho tre «control point» $\mathbf{p}_0$, $\mathbf{p}_1$, $\mathbf{p}_2$
- ✓ Data la coordinata parametrica $t \in [0..1]$,trovo :
  - ⇒ il punto $\mathbf{q}_0$ interpolando fra $\mathbf{p}_0$ e $\mathbf{p}_1$ (con t)
  - ⇒ il punto $\mathbf{q}_1$ interpolando fra $\mathbf{p}_1$ e $\mathbf{p}_2$ (con t)
- ✓ Infine
  - ⇒ ottengo il punto finale $f\ (\ t\ )$ interpolando fra $\mathbf{q}_0$ e $\mathbf{q}_0$ (di nuovo con t)

(Esercizio: seguire le istruzioni su un disegno)

Demo: http://www.malinc.se/m/DeCasteljauAndBezier.php

26

Formulaz. di De Casteljau: esempio per grado 3

- ✓4 «control point» $\mathbf{p}_0$, $\mathbf{p}_1$, $\mathbf{p}_2$, $\mathbf{p}_3$
- ✓data una posizione parametrica t ,trovo:
  - ⇒il punto $\mathbf{q}_0$ interpolando fra $\mathbf{p}_0$ e $\mathbf{p}_1$ (con t)
  - ⇒il punto $\mathbf{q}_1$ interpolando fra $\mathbf{p}_1$ e $\mathbf{p}_2$ (con t)
  - ⇒il punto $\mathbf{q}_2$ interpolando fra $\mathbf{p}_2$ e $\mathbf{p}_3$ (con t)
- ✓poi
  - ⇒il punto $\mathbf{r}_0$ interpolando fra $\mathbf{q}_0$ e $\mathbf{q}_1$ (con t)
  - ⇒il punto $\mathbf{r}_1$ interpolando fra $\mathbf{q}_1$ e $\mathbf{q}_2$ (con t)
- ✓e infine
  - ⇒il punto finale $f(t)$ interpolando fra $\mathbf{r}_0$ e $\mathbf{r}_1$ (con t)

(Esercizio: seguire le istruzioni su di un disegno)

27

Curva di Bezier di grado 3 in forma di codice

L'algoritmo di De Casteljau ci fornisce un modo per codificare la funzione f in modo semplice:

```
vec3 bezier( float t, // posiz. paramet.
             vec3 p0, vec3 p1,
             vec3 p2, vec3 p3)
{
   vec3 q0 = mix(p0,p1, t);  // cioè
                             // p0*(1-t)+p1*t
   vec3 q1 = mix(p1,p2, t);
   vec3 q2 = mix(p2,p3, t);
   vec3 r0 = mix(q0,q1, t);
   vec3 r1 = mix(q1,q2, t);
   return mix( r0, r1, t);
}
```

28