

1

### Algebra di punti e vettori – come studiare

- ✓ Anche se non si tratta di CG, queste basi sono necessarie ad una piena comprensione degli argomenti
  - ⇒ (e vengono chieste all'esame)
- ✓ Come appianare le eventuali lacune:
  - ⇒ Libri di testo consigliati
  - ⇒ In rete

Possibile libro di testo:  
*Mathematics for 3D Games and Computer Graphics*  
Eric Lengyel  
Chapters 2, 3

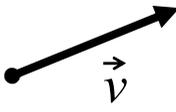


2

### Punti e vettori: cosa rappresentano

<p>✓ <b>Punto</b></p> <p>⇒ una posizione nello spazio</p>	<p>✓ <b>Vettore (geometrico)</b></p> <p>⇒ uno spostamento nello spazio</p> <p>⇒ Il delta fra due posizioni</p> <p>⇒ nota: <b>non è riferito ad una specifica posizione!</b></p> <p>⇒ ha una <i>lunghezza</i> e una <i>direzione</i></p>
---	---

### Punti e vettori: spesso disegnati come...

<p>✓ un pallino</p> <div style="text-align: center; margin-top: 20px;">  </div>	<p>✓ una freccia</p> <div style="text-align: center; margin-top: 20px;">  </div>
--	--



3

### Punti & Vettori Geometrici

	representa:	esempi:	Immaginali / disegni come...
<b>a Punto</b>	Una posizione, una locazione	Dove sta qualcosa Il centro di una sfera	Un piccolo pallino :-D
<b>un Vettore</b>	Uno spostamento La differenza spaziale fra due punti Il vettore che li connette	La velocità di un oggetto L'accelerazione di gravità Come raggiungere A da B	Una freccetta :-D  (con una data direzione e lunghezza)  (nota: non è relativa a nessuna posizione particolare)
<b>uno scalare</b>	Una qualità reale (positiva o negativa)	Il peso di una persona L'area di un triangolo	-

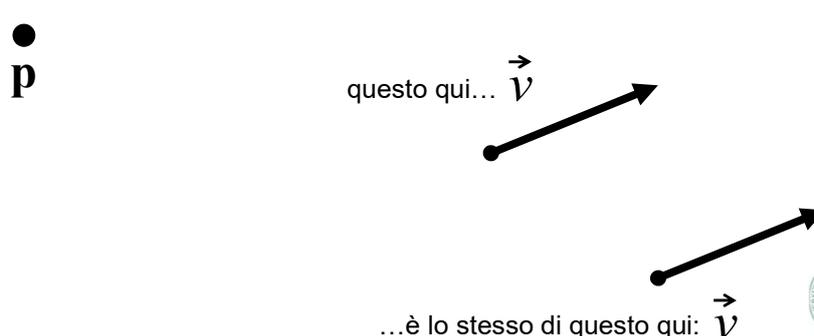


4

### Punti e vettori: disegnati come

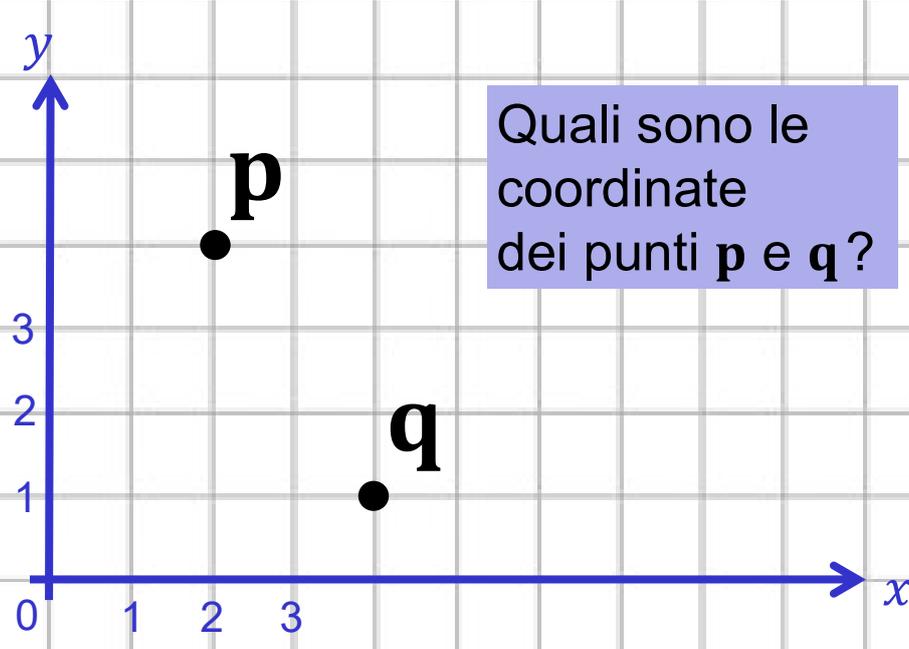
- ✓ Punti: un pallino
- ✓ Vettori: una freccetta

⇒ Nota:  
La freccetta sarà pur disegnata da qualche parte, ma non ha una posizione



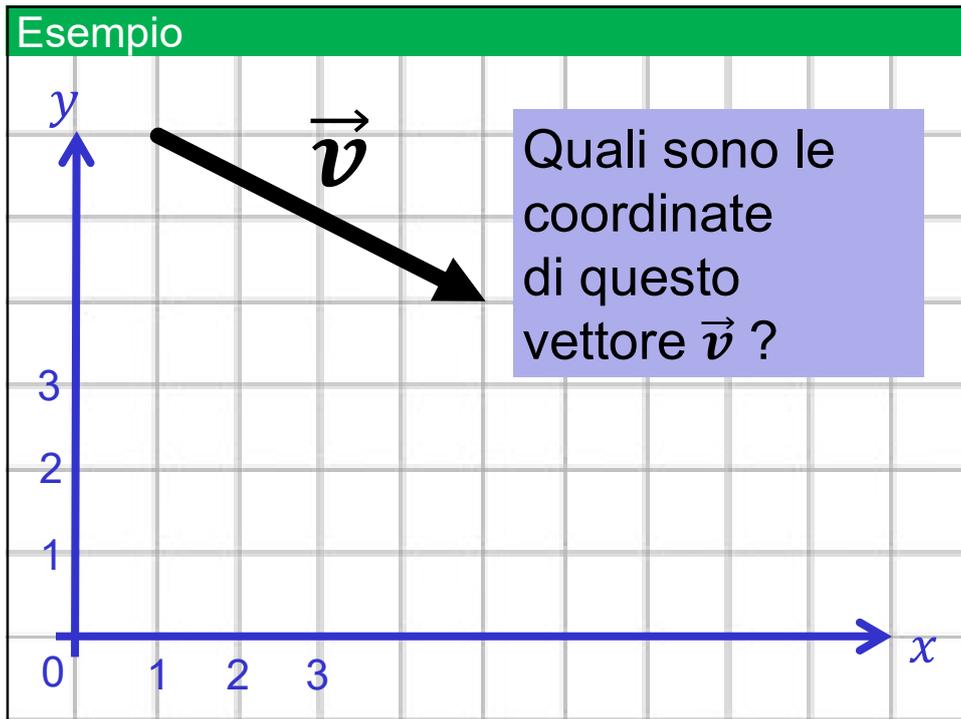
5

### Esempio

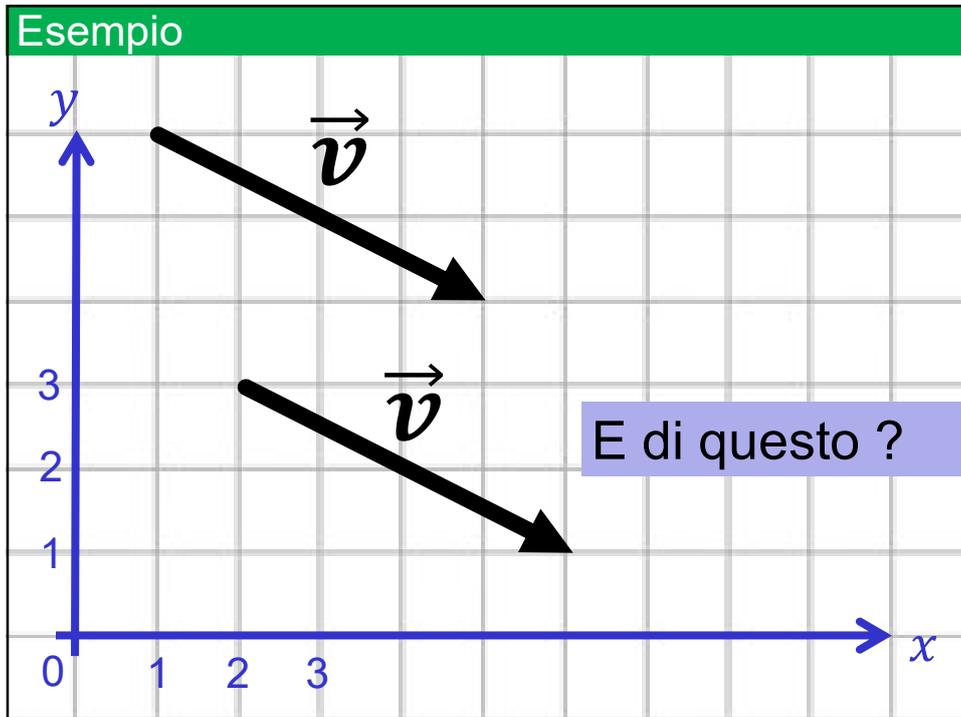


Quali sono le coordinate dei punti **p** e **q**?

8

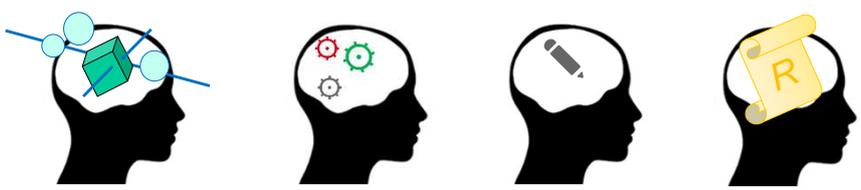


9



10

## Operazioni con punti e vettori: todo list



**spaziale**  
come immaginarle

**operazionale**  
come computarle

**sintattica**  
come scriverle

**algebraica**  
come manipolarle



11

## Algebra di punti e vettori

✓ Accertati di comprendere ogni operazione che vedremo dal punto di vista:



**intuitivo / spaziale :**  
cosa "fa" l'operazione dal punto di vista geometrico



**operazionale:** come computare il risultato a partire  
(1) dalle coordinate degli operandi  
(2) per i prodotti di vettori: anche dalle loro lunghezze e gli angoli



**sintattico:** come scrivere le operazioni  
(1) su carta (con che notazione)  
(2) in un linguaggio di programmazione  
(per es; in lib C++, o un linguaggio come GLSL...)



12

## Algebra di punti e vettori

✓ Inoltre, familiarizza con le loro



**regole algebriche** delle operazioni, come

- ⇒ è commutativa?
- ⇒ è commutativa?
- ⇒ distribuisce? (con un'altra op)
- ⇒ è invertibile?
- ⇒ quale è l'op inversa?
- ⇒ ha un elemento neutro? Un elemento assorbente?



13

## Coding: 1 struttura dati, tante semantiche

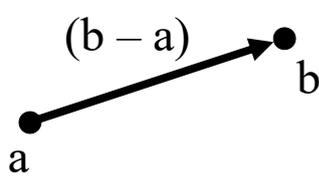
- ✓ Molte librerie e linguaggi usano uno stesso **data type** sia per punti 3D che per vettori 3D (e altro: versors, colori...)
  - ⇒ "vec3d", "Point3D", "vector" etc – vedi lab
- ✓ Tuttavia, la semantica non è la stessa
  - ⇒ Nulla di strano!
  - ⇒ Usiamo comunemente uno stesso tipo ("float", "double") per rappresentare cose molto diverse fra loro (per es, un peso, un volume, una temperatura).
- ✓ E' responsabilità del programmatore operare su questi dati in modo coerente.
  - ⇒ Per es: non ha senso sommare una temperatura con un'area
  - ⇒ Per es: ha senso dividere un peso per un volume (e si ottiene un peso specifico)
- ✓ Quali operazioni hanno senso fra punti, vettori e scalari?
  - ⇒ Cioè: quale è la loro algebra?



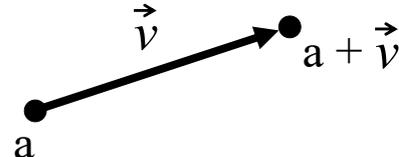
14

### Point and vector algebra (summary)

✓ Differenza:  
punto - punto = vettore



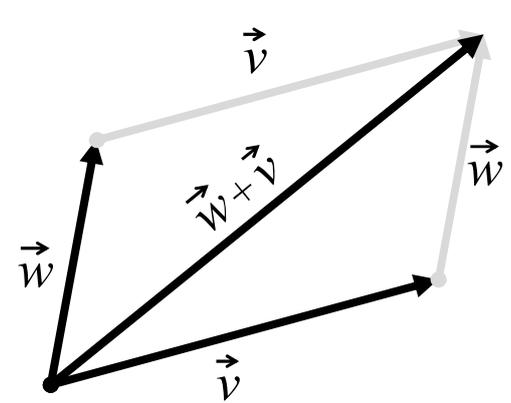
✓ Somma:  
punto + vettore = punto



15

### Vector algebra: somma fra vettori

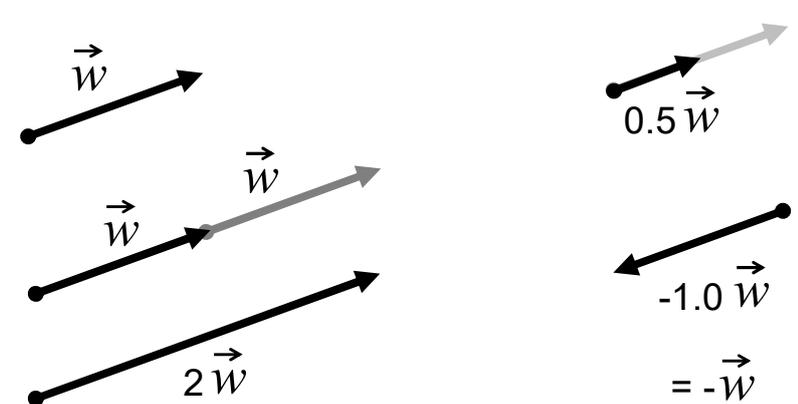
✓ vettore + vettore = vettore



16

### Vector algebra: scalatura di un vettore

✓ scalare  $\cdot$  vettore = vettore



$\vec{w}$

$0.5 \vec{w}$

$\vec{w}$

$2 \vec{w}$

$-1.0 \vec{w}$

$= -\vec{w}$



17

### Vector algebra: scalatura di un vettore (note)

- ✓ Scalare un vettore di un fattore scalare  $k$  lascia inalterata la sua direzione ma moltiplica la sua lunghezza per  $k$
- ✓ Se  $k > 1$  : lo allunga  
Se  $k = 1$  : lo lascia inalterato
- ✓ Se  $k$  fra 0 e 1: lo accorcia
- ✓ Se  $k = 0$  : otteniamo il vettore detengere  
⇒ Il vettore  $(0,0,0)$ : l'unico vettore lungo 0;  
⇒ degenerare perché non ha una direzione
- ✓ Se  $k$  fra -1 e 0: lo accorcia e lo ribalta  
⇒ Cioè inverte la direzione
- ✓ Se  $k = -1$ : lo ribalta
- ✓ Se  $k < -1$ : lo ribalta e lo allunga



18

## Alcune operazioni fra vettori (recap)

Operazioni lineari:

✓ somma (fra vettori):

$$\text{vettore} + \text{vettore} = \text{vettore}$$

✓ scalatura (o, prodotto con uno scalare)

$$\text{scalare} \cdot \text{vettore} = \text{vettore}$$

⇒ Di solito, si omette il simbolo dell'operatore  $\cdot$

✓ Opposto, o flip (inversione del verso)

$$-\text{vettore} = \text{vettore}$$

⇒ E' un modo per scrivere la moltiplicazione con lo scalare  $-1$

✓ Sottrazione fra vettori

$$\text{vettore} - \text{vettore} = \text{vettore}$$

⇒ E' un modo per scrivere la somma con il vettore opposto



19

## Un primo esempio di problemi geometrici

✓ Usando le nostre operazioni, siamo in grado di risolvere problemi di natura geometrica come...:

⇒ Dati due posizioni **a** e **b**,

trovare il punto **c** che raggiungo se parto da **a** e mi muovo verso **b** in linea retta, ma faccio il doppio della strada che mi porterebbe a raggiungere **b**

⇒ Date due posizioni **a** e **b**, trovare il punto **c** intermedio del segmento che li congiunge

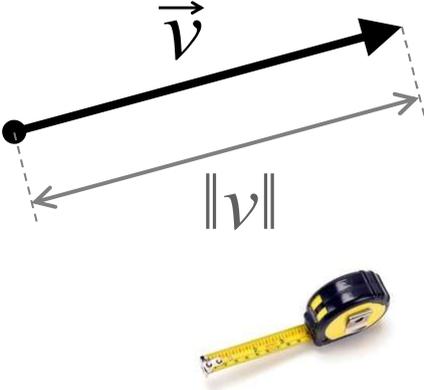
⇒ Date due posizioni **a** e **b**, trovare la posizione **c** sul segmento che li congiunge che dista da **b** il doppio di quanto dista da **a**



20

### Point and vector algebra: norma

✓ norma di un vettore = uno scalare

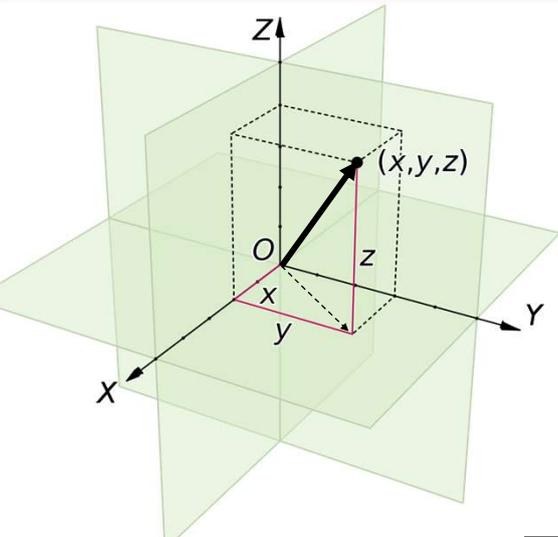


The diagram shows a vector  $\vec{v}$  starting from a black dot and ending at an arrowhead. A dashed line extends from the start point to the right, and another dashed line extends from the arrowhead down to this line, forming a right-angled triangle. A horizontal arrow below this line is labeled  $\|\vec{v}\|$ . Below the diagram is a yellow and black measuring tape.



21

### Calcolo della norma



The diagram shows a 3D coordinate system with axes labeled X, Y, and Z. The origin is labeled O. A vector  $\vec{v}$  is shown starting from O and ending at a point labeled  $(x,y,z)$ . Dashed lines form a rectangular prism with the vector as its diagonal. The projections of the vector onto the X, Y, and Z axes are labeled x, y, and z respectively.

Applicando il teorema di pitagora (2 volte):

$$\|\vec{v}\| = \sqrt{v_x^2 + v_y^2 + v_z^2}$$


22

## Norma di un vettore

- ✓ Terminologia: è detta anche:
  - ⇒ lunghezza, magnitudine, intensità, estensione, norma-2, norma Euclidea, o anche solo norma
  - ⇒ in realtà, “norma” è un termine più generico che può denotare altre funzioni (non usate in questo corso)
- ✓ Scritta come  $\|\vec{v}\|$  o  $\|\vec{v}\|_2$  o (a volte)  $|\vec{v}|$
- ✓ Calcolata come

$$\|\vec{v}\| = \sqrt{v_x^2 + v_y^2 + v_z^2}$$

dove  $v_x, v_y, v_z$  sono le coordinate del vettore

(come si evince applicando il teorema di pitagora... due volte)

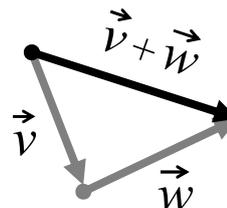
- ✓ Denotata nel codice (in librerie o linguaggi di programmazione) come funzione o metodo  
`length(v)` o `v.length()` o `v.norm()` ... o simile
- ✓ Rappresenta: l'estensione di un vettore



23

## Alcune caratteristiche della norma

- ✓ La **norma** è sempre  $\geq 0$ , ed è 0 solo per vettori **nulli**
  - ⇒ vettore nullo = vettore (0,0,0)
  - ⇒ detto anche “**degenere**” perché non ha una direzione
- ✓ **Distanza** fra due **punti** a e b :  
norma della loro differenza  $\|a - b\|$
- ✓ **Norma** e **scalatura di vettore**:  
 $\|k \vec{v}\| = |k| \|\vec{v}\|$
- ✓ **Norma** e **somma vettoriale**:  
 $\|\vec{v} + \vec{w}\| \leq \|\vec{v}\| + \|\vec{w}\|$   
 (“disuguaglianza triangolare”)

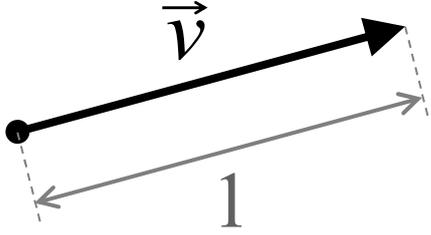


24

### Unit vectors

Vettori a lunghezza 1

- ✓ anche detti:
  - ⇒ vettori unitari
  - ⇒ vettori normali
  - ⇒ versori
- ✓ A volte denotati con il cappuccio invece che la freccetta, così:  $\hat{v}$
- ✓ Rappresentano: una direzione



25

### Un esempio di problema geometrico

- ✓ Siano date due sfere, con i centri in posizione  $\mathbf{c}_0$  e  $\mathbf{c}_1$  e raggio  $r_0$  e  $r_1$   
C'è intersezione (si toccano / compenetrano?)
- ✓ Soluzione: sì, se
$$\|\mathbf{c}_0 - \mathbf{c}_1\| < r_0 + r_1$$
- ✓ Cioè se...
$$\|\mathbf{c}_0 - \mathbf{c}_1\|^2 < (r_0 + r_1)^2$$

Esercizio:

- ⇒ Verifica il tipo della formula qui sopra, incluso il tipo (punto, vettore, scalare) di ogni sottoespressione
- ⇒ Perché la seconda espressione è più efficiente da computare della prima?



26

## Semplici miniproblemi geometrici (esempi)

(da risolvere usando solo le operazioni viste!)

✓ Problema 1:

- ⇒ Un passerotto siede in un ramo in un punto A
- ⇒ Vola verso un punto B su un altro ramo (in linea retta),
- ⇒ ma distrattamente lo supera, e finisce col percorrere il **doppio** della strada
- ⇒ In quale punto C finisce?

✓ Problema 2:

- ⇒ Stesse ipotesi, ma questa volta percorre il 75% della strada (poi si ferma a mezz'aria)
- ⇒ In quale punto C si è fermato?

✓ Problema 3:

- ⇒ Questa volta arriva a destinazione... autonomia permettendo.
- ⇒ Riesce a raggiungere la destinazione, se ha un'autonomia di 0.03 metri?

✓ Problema 4:

- ⇒ Prima di partire, da che parte si è orientato (si chiede di specificare un... vettore unitario che esprime questo orientamento!)



27