


1

Algebra di punti e vettori – come studiare

- ✓ Anche se non si tratta di CG, queste basi sono necessarie ad una piena comprensione degli argomenti
 - ⇒ (e vengono chieste all'esame)
- ✓ Come appianare le eventuali lacune:
 - ⇒ Libri di testo consigliati
 - ⇒ In rete

Mathematics
for 3D Game Programming
and Computer Graphics
Third Edition
Eric Lengyel

Possibile libro di testo:
Mathematics for 3D Games and Computer Graphics
Eric Lengyel
Chapters 2, 3


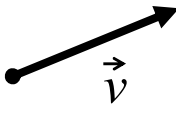



2

Punti e vettori: cosa rappresentano

| | |
|---|---|
| <p>✓ Punto</p> <p>⇒ una posizione nello spazio</p> | <p>✓ Vettore (geometrico)</p> <p>⇒ uno spostamento nello spazio</p> <p>⇒ Il delta fra due posizioni</p> <p>⇒ nota: non è riferito ad una specifica posizione!</p> <p>⇒ ha una <i>lunghezza</i> e una <i>direzione</i></p> |
|---|---|

Punti e vettori: spesso disegnati come...


| | |
|--|--|
| <p>✓ un pallino</p> <div style="text-align: center; margin-top: 20px;">  </div> | <p>✓ una freccia</p> <div style="text-align: center; margin-top: 20px;">  </div> |
|--|--|



3

Punti & Vettori Geometrici

| | representa: | esempi: | Immaginali / disegni come... |
|--------------------|---|--|---|
| a Punto | Una posizione, una locazione | Dove sta qualcosa Il centro di una sfera | Un piccolo pallino :-D |
| un Vettore | Uno spostamento La differenza spaziale fra due punti Il vettore che li connette | La velocità di un oggetto L'accelerazione di gravità Come raggiungere A da B | Una freccetta :-D (con una data direzione e lunghezza) (nota: non è relativa a nessuna posizione particolare) |
| uno scalare | Una qualità reale (positiva o negativa) | Il peso di una persona L'area di un triangolo | - |

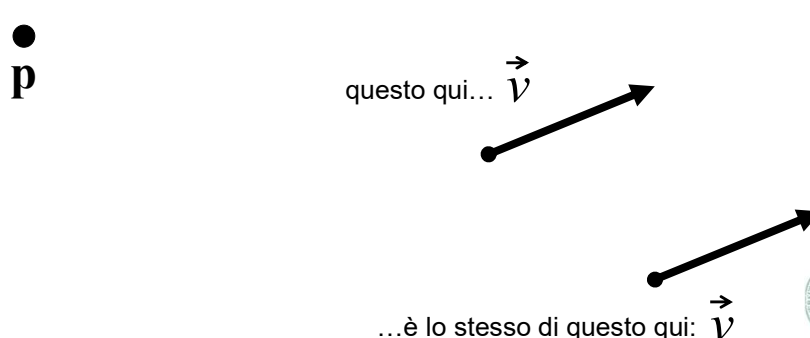


4

Punti e vettori: disegnati come

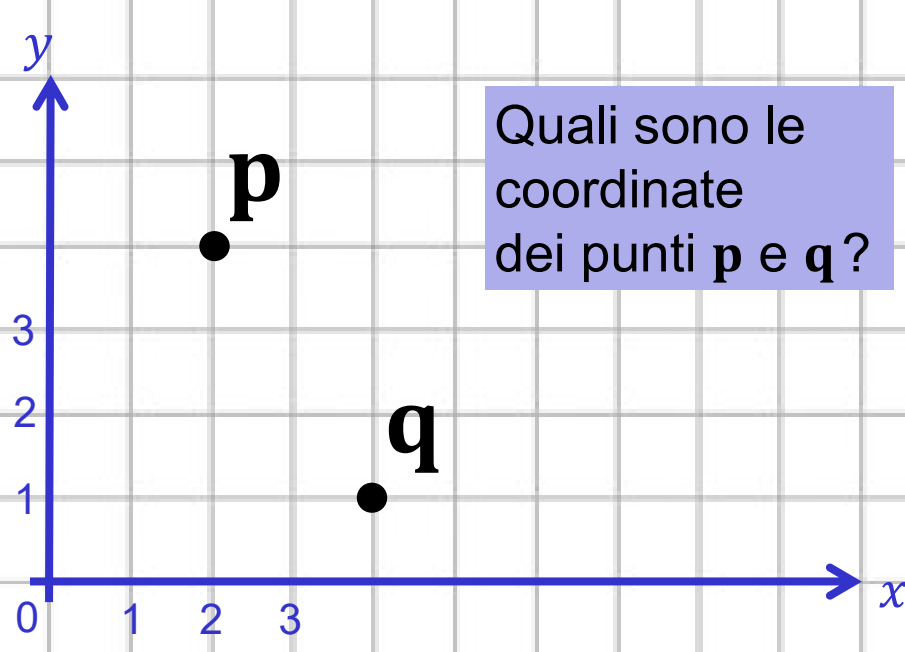
- ✓ Punti: un pallino
- ✓ Vettori: una freccetta

⇒ Nota:
La freccetta sarà pur disegnata da qualche parte, ma non ha una posizione



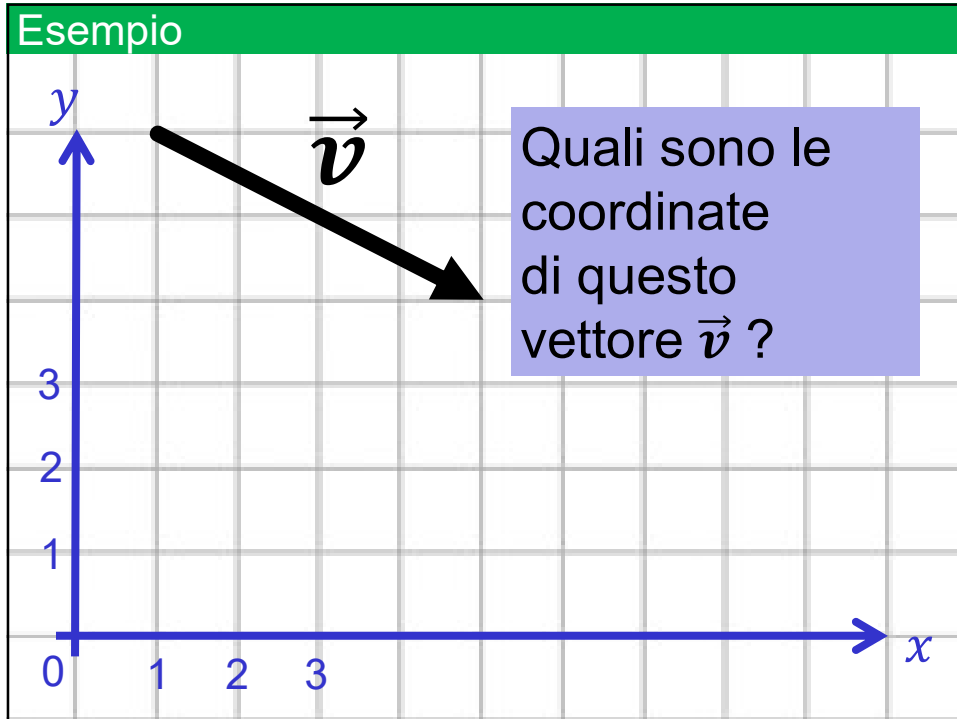
5

Esempio

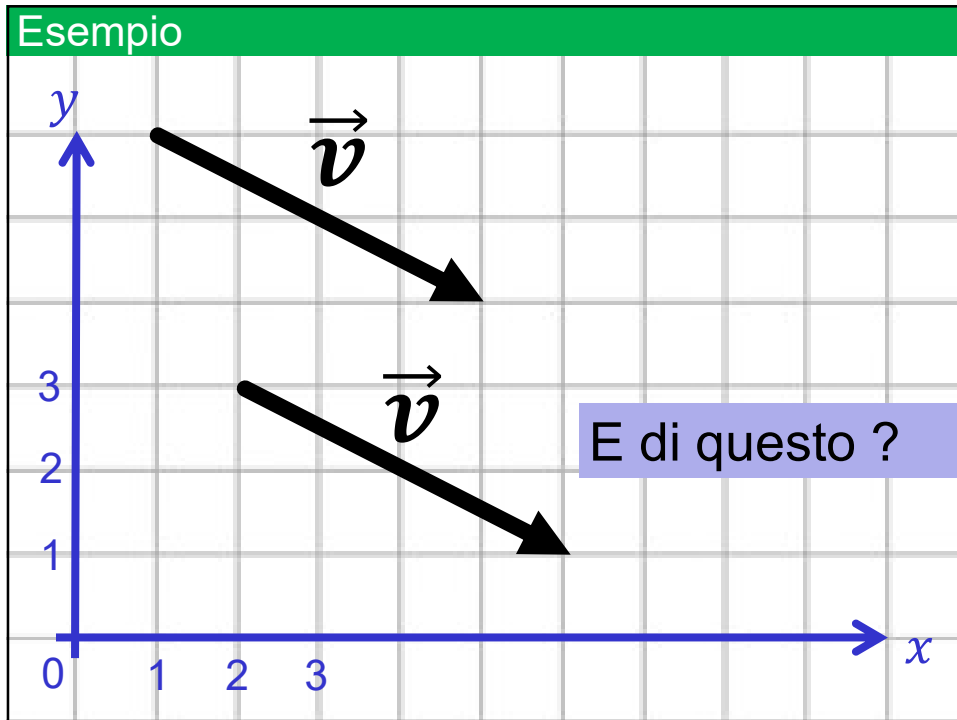


Quali sono le coordinate dei punti **p** e **q**?

8

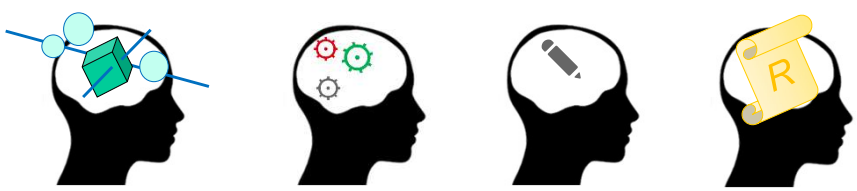


9



10

Operazioni con punti e vettori: todo list




spaziale
come immaginarle

operazionale
come computarle

sintattica
come scriverle


algebraica
come manipolarle




11

Algebra di punti e vettori


✓ Accertati di comprendere ogni operazione che vedremo dal punto di vista:




intuitivo / spaziale :
cosa "fa" l'operazione dal punto di vista geometrico



operazionale: come computare il risultato a partire
(1) dalle coordinate degli operandi
(2) per i prodotti di vettori: anche dalle loro lunghezze e gli angoli



sintattico: come scrivere le operazioni
(1) su carta (con che notazione)
(2) in un linguaggio di programmazione
(per es; in lib C++, o un linguaggio come GLSL...)



12

Algebra di punti e vettori

- ✓ Inoltre, familiarizza con le loro



regole algebriche delle operazioni, come

- ⇒ è commutativa?
- ⇒ è associativa?
- ⇒ distribuisce? (con un'altra op)
- ⇒ è invertibile?
- ⇒ quale è l'op inversa?
- ⇒ ha un elemento neutro? Un elemento assorbente?



13

Coding: 1 struttura dati, tante semantiche

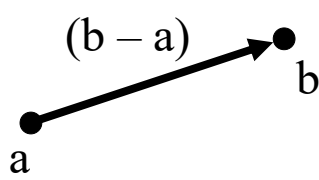
- ✓ Molte librerie e linguaggi usano uno stesso **data type** sia per punti 3D che per vettori 3D (e altro: versors, colori...)
 - ⇒ "vec3d", "Point3D", "vector" etc – vedi lab
- ✓ Tuttavia, la semantica non è la stessa
 - ⇒ Nulla di strano!
 - ⇒ Usiamo comunemente uno stesso tipo ("float", "double") per rappresentare cose molto diverse fra loro (per es, un peso, un volume, una temperatura).
- ✓ E' responsabilità del programmatore operare su questi dati in modo coerente.
 - ⇒ Per es: non ha senso sommare una temperatura con un'area
 - ⇒ Per es: ha senso dividere un peso per un volume (e si ottiene un peso specifico)
- ✓ Quali operazioni hanno senso fra punti, vettori e scalari?
 - ⇒ Cioè: quale è la loro algebra?




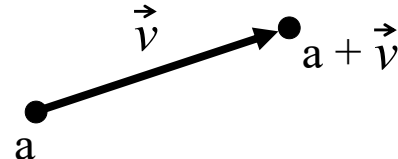
14

Point and vector algebra (summary)

✓ Differenza:
punto - punto = vettore




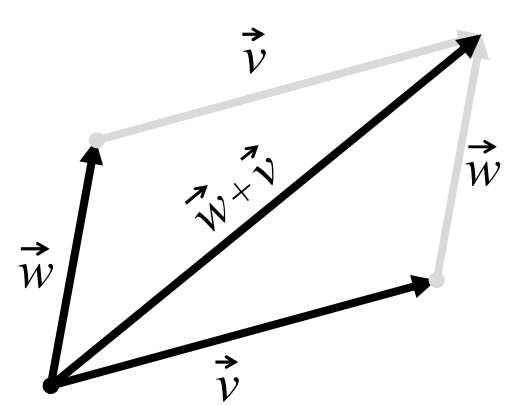
✓ Somma:
punto + vettore = punto



15

Vector algebra: somma fra vettori

✓ vettore + vettore = vettore




16

Vector algebra: scalatura di un vettore

✓ scalare · vettore = vettore


The diagram illustrates vector scaling. On the left, a vector \vec{w} is shown being scaled by 0.5 (shorter), 1 (same length), and 2 (longer). On the right, \vec{w} is scaled by -0.5 (shorter and opposite direction) and -1.0 (opposite direction, labeled as $-\vec{w}$).



17

Vector algebra: scalatura di un vettore (note)

- ✓ Scalare un vettore di un fattore scalare k lascia inalterata la sua direzione ma moltiplica la sua lunghezza per k
- ✓ Se $k > 1$: lo allunga
Se $k = 1$: lo lascia inalterato
- ✓ Se k fra 0 e 1: lo accorcia
- ✓ Se $k = 0$: otteniamo il vettore detengere
 - ⇒ Il vettore $(0,0,0)$: l'unico vettore lungo 0;
 - ⇒ degenerare perché non ha una direzione
- ✓ Se k fra -1 e 0: lo accorcia e lo ribalta
 - ⇒ Cioè inverte la direzione
- ✓ Se $k = -1$: lo ribalta
- ✓ Se $k < -1$: lo ribalta e lo allunga



18

Alcune operazioni fra vettori (recap)

Operazioni lineari:

✓ somma (fra vettori):

$$\text{vettore} + \text{vettore} = \text{vettore}$$

✓ scalatura (o, prodotto con uno scalare)

$$\text{scalare} \cdot \text{vettore} = \text{vettore}$$

⇒ Di solito, si omette il simbolo dell'operatore \cdot

✓ Opposto, o flip (inversione del verso)

$$- \text{vettore} = \text{vettore}$$

⇒ E' un modo per scrivere la moltiplicazione con lo scalare -1

✓ Sottrazione fra vettori

$$\text{vettore} - \text{vettore} = \text{vettore}$$

⇒ E' un modo per scrivere la somma con il vettore opposto



19

Un primo esempio di problemi geometrici

✓ Usando le nostre operazioni, siamo in grado di risolvere problemi di natura geometrica come...:

⇒ Dati due posizioni **a** e **b**,

trovare il punto **c** che raggiungo se parto da **a** e mi muovo verso **b** in linea retta, ma faccio il doppio della strada che mi porterebbe a raggiungere **b**

⇒ Date due posizioni **a** e **b**, trovare il punto **c** intermedio del segmento che li congiunge

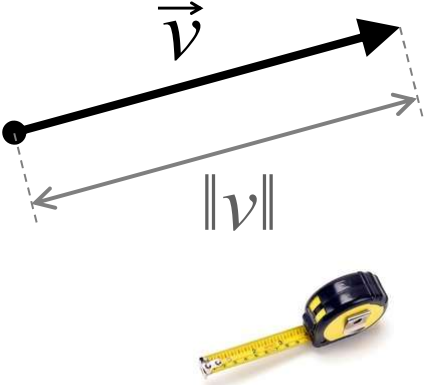
⇒ Date due posizioni **a** e **b**, trovare la posizione **c** sul segmento che li congiunge che dista da **b** il doppio di quanto dista da **a**




20

Point and vector algebra: norma

✓ norma di un vettore = uno scalare

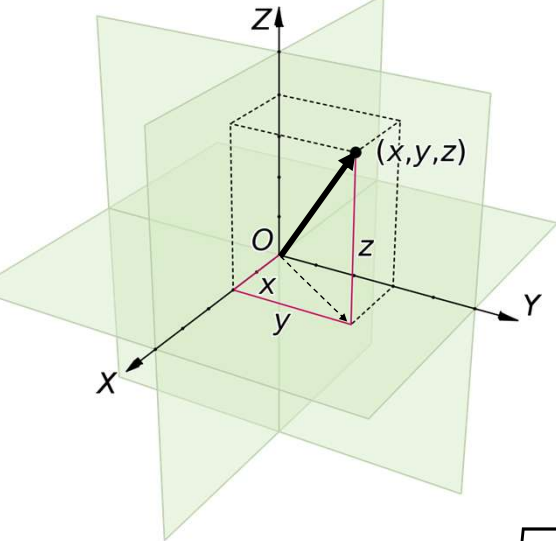


The diagram shows a vector \vec{v} starting from a black dot and ending at an arrowhead. A dashed line extends from the start point to the right, and another dashed line extends from the arrowhead down to this line, forming a right-angled triangle. A horizontal arrow below this line is labeled $\|\vec{v}\|$. Below the diagram is a yellow and black measuring tape.




21

Calcolo della norma



A 3D coordinate system with axes X, Y, and Z. The origin is labeled O. A vector \vec{v} is shown starting from O and ending at the point (x, y, z) . Dashed lines show the projections of the vector onto the axes: x on the X-axis, y on the Y-axis, and z on the Z-axis. The projections on the XY and YZ planes are also shown with dashed lines.

Applicando il teorema di pitagora (2 volte):

$$\|\vec{v}\| = \sqrt{v_x^2 + v_y^2 + v_z^2}$$


22

Norma di un vettore

- ✓ Terminologia: è detta anche:
 - ⇒ lunghezza, magnitudine, intensità, estensione, norma-2, norma Euclidea, o anche solo norma
 - ⇒ in realtà, “norma” è un termine più generico che può denotare altre funzioni (non usate in questo corso)
- ✓ Scritta come $\|\vec{v}\|$ o $\|\vec{v}\|_2$ o (a volte) $|\vec{v}|$
- ✓ Calcolata come

$$\|\vec{v}\| = \sqrt{v_x^2 + v_y^2 + v_z^2}$$

dove v_x, v_y, v_z sono le coordinate del vettore

(come si evince applicando il teorema di pitagora... due volte)

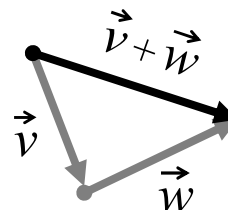
- ✓ Denotata nel codice (in librerie o linguaggi di programmazione) come funzione o metodo
`length(v)` o `v.length()` o `v.norm()` ... o simile
- ✓ Rappresenta: l'estensione di un vettore



23

Alcune caratteristiche della norma

- ✓ La **norma** è sempre ≥ 0 , ed è 0 solo per vettori **nulli**
 - ⇒ vettore nullo = vettore (0,0,0)
 - ⇒ detto anche “**degenere**” perché non ha una direzione
- ✓ **Distanza** fra due **punti** a e b :
norma della loro differenza $\|a - b\|$
- ✓ **Norma** e **scalatura di vettore**:
 $\|k \vec{v}\| = |k| \|\vec{v}\|$
- ✓ **Norma** e **somma vettoriale**:
 $\|\vec{v} + \vec{w}\| \leq \|\vec{v}\| + \|\vec{w}\|$
 (“disuguaglianza triangolare”)


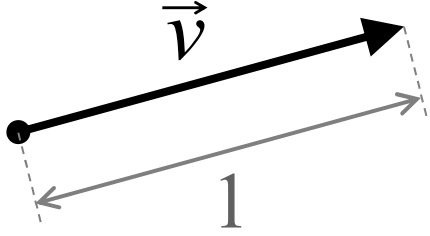


24

Unit vectors

Vettori a lunghezza 1

- ✓ anche detti:
 - ⇒ vettori unitari
 - ⇒ vettori normali
 - ⇒ versori
- ✓ A volte denotati con il cappuccio invece che la freccetta, così: \hat{v}
- ✓ Rappresentano: una direzione




25

Un esempio di problema geometrico

- ✓ Siano date due sfere, con i centri in posizione \mathbf{c}_0 e \mathbf{c}_1 e raggio r_0 e r_1
C'è intersezione (si toccano / compenetrano?)
- ✓ Soluzione: sì, se
$$\|\mathbf{c}_0 - \mathbf{c}_1\| < r_0 + r_1$$
- ✓ Cioè se...
$$\|\mathbf{c}_0 - \mathbf{c}_1\|^2 < (r_0 + r_1)^2$$

Esercizio:

- ⇒ Verifica il tipo della formula qui sopra, incluso il tipo (punto, vettore, scalare) di ogni sottoespressione
- ⇒ Perché la seconda espressione è più efficiente da computare della prima?



26

Semplici miniproblemi geometrici (esempi)

(da risolvere usando solo le operazioni viste!)

✓ Problema 1:

- ⇒ Un passerotto siede in un ramo in un punto A
- ⇒ Vola verso un punto B su un altro ramo (in linea retta),
- ⇒ ma distrattamente lo supera, e finisce col percorrere il **doppio** della strada
- ⇒ In quale punto C finisce?

✓ Problema 2:

- ⇒ Stesse ipotesi, ma questa volta percorre il 75% della strada (poi si ferma a mezz'aria)
- ⇒ In quale punto C si è fermato?

✓ Problema 3:

- ⇒ Questa volta arriva a destinazione... autonomia permettendo.
- ⇒ Riesce a raggiungere la destinazione, se ha un'autonomia di 0.03 metri?

✓ Problema 4:

- ⇒ Prima di partire, da che parte si è orientato (si chiede di specificare un... vettore unitario che esprime questo orientamento!)



27