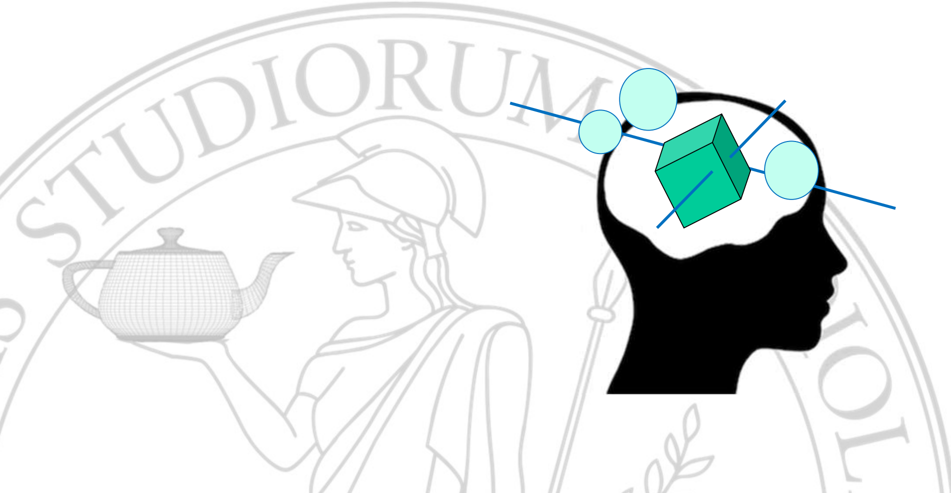
Marco Tarini - Computer Graphics 2024/2025
Università degli Studi di Milano

# Interpolazione di punti e coordinate baricentriche



41

## Combinazione lineare (di *n* vettori)

- ✓ I **vettori** sono dotati delle operazioni di
  - ⇒ scalatura (moltiplicaz per scalare)
  - ⇒ somma (vettoriale)
- ✓ Dunque, posso effettuare **combinazioni lineari** di due o più vettori

$$\vec{\mathbf{w}} = k_0\,\vec{\mathbf{v}_0} + k_1\,\vec{\mathbf{v}_1} + k_2\,\vec{\mathbf{v}_2}$$

i **“Pesi”** della combinazione lineare

Combinazione lineare di $\vec{\mathbf{v}_0}$ , $\vec{\mathbf{v}_1}$ e $\vec{\mathbf{v}_2}$

42

## Interpolazione ed estrapolazione (di *n* vettori)

- Quando i pesi $k_0\ k_1\ k_2\ \ldots$ sono positivi e a somma 1, cioè:

$$\sum_i k_i = 1 \qquad \text{e} \qquad \forall\, i\,.\, 0 \leq k_i \leq 1$$

  - ⇒ cioè quando i pesi sono una «partizione dell'unità»
- allora la combinazione lineare si chiama **interpolazione** (lineare)
  - ⇒ O anche, semplicemente: una «media pesata»
  - ⇒ Caso particolare: se i pesi sono tutti uguali a $1/n$ : una media
- Se invece

$$\sum_i k_i = 1 \qquad \text{ma} \qquad \exists\ i\,.\ k_i < 0$$

- allora abbiamo una **estrapolazione** (lineare)

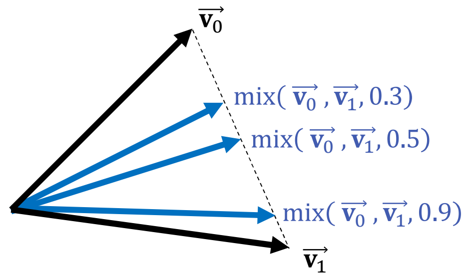
43

## Interpolazione fra 2 elementi

- Quando $n = 2$, uno dei due pesi è esprimibile come differenza dell'altro
  - ⇒ quindi abbiamo un solo paramametro: $t$ , uno dei due pesi e l'atro peso è dato da $(1 - t)$ .
  - ⇒ L'interpolazione diventa…

$$\text{mix}(\vec{\mathbf{v}_0}, \vec{\mathbf{v}_1}, t) = (1 - t)\,\vec{\mathbf{v}_0} + (t)\,\vec{\mathbf{v}_1}$$

Un sinonimo di "interpolazione"




44

## Come si interpola fra …

Interpolazione lineare

⇒…due **vettori** $\mathbf{v}_0$ e $\mathbf{v}_1$ :

$$\mathbf{v}_0 \,(1 - t) + \mathbf{v}_1 \,(t)$$

Moltiplicazione fra punti e scalari? Somma fra punti? Queste operazioni, prese individualmente, non hanno alcun senso geometrico

⇒…due **punti** $\mathbf{p}_0$ e $\mathbf{p}_1$ :

$$\mathbf{p}_0 \,(1 - t) + \mathbf{p}_1 \,(t)$$

è solo una riscrittura di:

$$\mathbf{p}_0 + (\mathbf{p}_1 - \mathbf{p}_0)\, t$$

operazioni che hanno un senso geometrico (esercizio: verifica)

45

## Interpolazione fra due elementi

✓ Terminologia: (usata in librerie, linguaggi di programmazione…)
- ⇒ **interpolate** = **mix** = **blend** = **lerp**

“L” = espressamente lineare

✓ **Interpolare** fra coppie di <*qualcosa*> :
- ⇒ mix( point , point , *t* ) → point
- ⇒ mix( vector , vector , *t* ) → vector

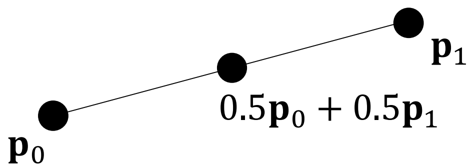
✓ *t* è il **«peso» scalare**
- ⇒ *t* = 0 → prendi il primo dei due
- ⇒ *t* = 1 → prendi il secondo dei due
- ⇒ *t* ∊ (0,1) → prendi un misto dei due, ad esempio:
- ⇒ *t* = 0.5 → prendi la **media** dei due
- ⇒ *t* = 0.1 → quasi il primo, con un pochino del secondo
- ⇒ *t* < 0 or t > 1 → **estrapolazione**

un’interpolazione propriamente detta

47

## Segmento come luogo di punti

- ✓ Dati due punti $\mathbf{p}_0$ e $\mathbf{p}_1$,
  analizziamo l'insieme di tutti i punti
  ottenibili interpolando $\mathbf{p}_0$ e $\mathbf{p}_1$ :
- ✓ E' il segmento che li connette!

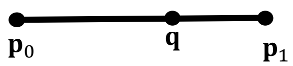



- ✓ "Un segmento è l'insieme dei punti ottenibili interpolando i suoi due estremi"
  - ⇒ Domanda (esercizio): qual è invece il luogo dei punti ottenibili come un'estraploazione di $\mathbf{p}_0$ e $\mathbf{p}_1$ ?

48

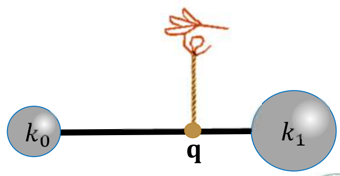
## Coordinate baricentriche in un segmento

- ✓ E' anche vero il viceversa:
  qualsiasi punto in un segmento $\mathbf{S}$ è dato da una (e una sola!) interpolazione dei suoi due estremi $\mathbf{p}_0$ e $\mathbf{p}_1$
  - ⇒ Con i pesi opportunamente scelti
- ✓ Cioè dato un punto $\mathbf{q} \in \mathbf{S}$ ,
  esistono unici $k_0$ , $k_1 \in [0,1]$
  con $k_0 + k_1 = 1$
  tali che




$$\mathbf{q} = k_0 \ \mathbf{p}_0 + k_1 \ \mathbf{p}_1$$

- ✓ $k_0$ , $k_1$ sono dette le
  **coordinate baricentriche**
  di $\mathbf{q}$ nel segmento $\mathbf{S}$
  - ⇒ Perchè (motivazione storica)…
    se poniamo due masse $k_0$ e $k_1$
    in $\mathbf{p}_0$ e $\mathbf{p}_1$, allora $\mathbf{q}$ diventa
    il baricentro del segmento

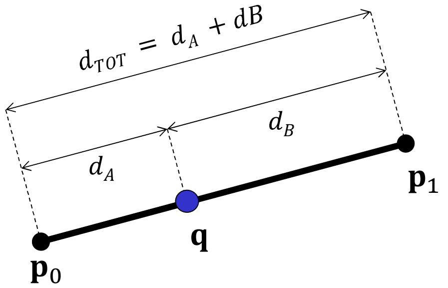



50

## Coordinate baricentriche in un segmento

- Problema:
  - ⇒ dato un segmento $\mathbf{S}$ di estremi $\mathbf{p}_0$ e $\mathbf{p}_1$ e un punto $\mathbf{q} \in \mathbf{S}$ , come trovo le coordinate baricentriche di $\mathbf{q}$ ?

$$\mathbf{q} = k_0 \; \mathbf{p}_0 + k_1 \; \mathbf{p}_1$$



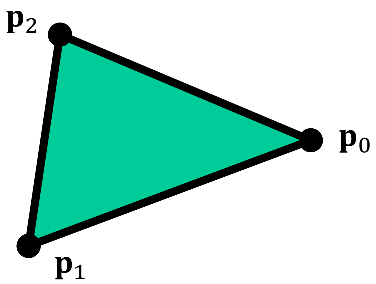

$$k_0 = dB \;/\; d_{TOT}$$
$$k_1 = d_A \;/\; d_{TOT}$$

- Soluzione:
  - ⇒ q spezza S in due sotto-segmenti. L'estensione di ciascun sottosegmento (diviso l'estensione totale di S) è la coordinata baricentrica relativa all'estremo OPPOSTO (verifica con delle prove)

51

## Triangolo come luogo di punti

- Dati tre punti (in 2D oppure in 3D) $\mathbf{p}_0$ , $\mathbf{p}_1$ e $\mathbf{p}_2$ , consideriamo l'insieme di tutti i punti ottenibili dalla loro interpolazione
- E' il triangolo che ha i vertici in quei tre punti!




- "Un triangolo è l'insieme dei punti ottenibili interpolando i suoi tre vertici"
  - ⇒ Domanda (esercizio): qual è invece il luogo dei punti ottenibili come una loro estraploazione ?

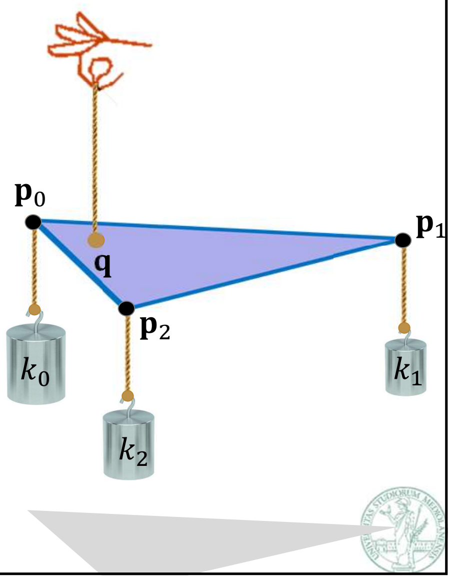
52

## Triangolo come luogo di punti

- ✓ Dato un triangolo $\mathbf{T}$ (in 3D) di vertici $\mathbf{p}_0$ e $\mathbf{p}_1$ e $\mathbf{p}_2$ e un punto $\mathbf{q} \in \mathbf{T}$ , esistono unici $k_0$ , $k_1$ , $k_2 \in [0,1]$ con $k_0 + k_1 + k_2 = 1$ tali che

$$\mathbf{q} = k_0\ \mathbf{p}_0 + k_1\ \mathbf{p}_1 + k_2\ \mathbf{p}_1$$

- ✓ $k_0, k_1, k_2$ sono dette le **coordinate baricentriche** di $\mathbf{q}$ nel triangolo $\mathbf{T}$
  - ⇒ Stessa motivazione storica… se poniamo dei pesi $k_0$ , $k_1$ e $k_2$ in $\mathbf{p}_0$ , $\mathbf{p}_1$ e $\mathbf{p}_2$, allora $\mathbf{q}$ diventa il baricentro del triangolo




54

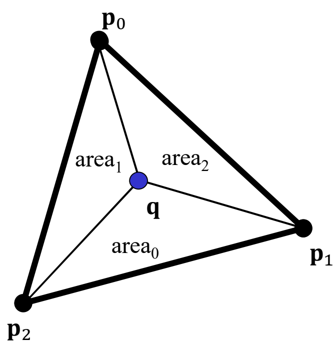
## Coordinate baricentriche in un triangolo

- ✓ Problema:
  - ⇒ dato un triangolo $\mathbf{T}$ con vertici nei punti 3D $\mathbf{p}_0$, $\mathbf{p}_1$ , $\mathbf{p}_2$ e un punto $\mathbf{q} \in \mathbf{T}$ trovare le coordinate baricentriche di $\mathbf{q}$ in $\mathbf{T}$?

$$\mathbf{q} = k_0\ \mathbf{p}_0 + k_1\ \mathbf{p}_1 + k_2\ \mathbf{p}_2$$

$$\text{area}_{\text{TOT}} = \text{area}_0 + \text{area}_1 + \text{area}_2$$

$$k_0 = \text{area}_0 / \text{area}_{\text{TOT}}$$
$$k_1 = \text{area}_1 / \text{area}_{\text{TOT}}$$
$$k_2 = \text{area}_2 / \text{area}_{\text{TOT}}$$

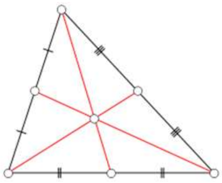



- ✓ Soluzione:
  - ⇒ $\mathbf{q}$ spezza $\mathbf{T}$ in tre sotto-triangoli. L'area di ciascun sotto-triangolo (diviso l'area totale di $\mathbf{T}$) è la coordinata baricentrica relativa all'estremo OPPOSTO (verifica con delle prove)

56

## Coordiante baricentriche: esercizi

- ✓ Dato un triangolo di vertici $\mathbf{p}_0, \mathbf{p}_1, \mathbf{p}_2$ quali sono le coordinate baricentriche di…
  - ⇒ il punto $\mathbf{p}_1$
  - ⇒ un punto a metà del lato fra $\mathbf{p}_0$ e $\mathbf{p}_1$
  - ⇒ il baricentro del triangolo detto anche centroide del triangolo



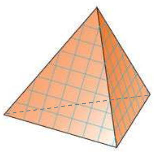
Nota: il baricentro di un triangolo è l'intersezione delle tre mediane e seca ogni mediana ad 1/3 della sua lunghezza

  - ⇒ un punto nel segmento fra $\mathbf{p}_0$ e $\mathbf{p}_1$ che dista da $\mathbf{p}_0$ il triplo di quanto dista da $\mathbf{p}_1$

57

## Oltre a N = 3…

- ✓ Le interpolazioni fra 2 punti (in 2D o 3D) formano un **segmento**
  - ⇒ i 2 punti sono i suoi estremi
- ✓ Le interpolazioni fra 3 punti (in 2D o 3D) formano un **triangolo**
  - ⇒ i 3 punti sono i suoi vertici
- ✓ Le interpolazioni fra 4 punti (in 3D) formano un **tetraedro**
  - ⇒ i 4 punti sono i suoi vertici



Tetraedro = piramide a base triangolare
un solido delimitato da 4 triangoli

  - ⇒ la cosa è generalizzabile a dimensioni maggiori ma non ci interessa
- ✓ Per questo, le sequenze di segmenti (linee spezzate), le superfici triangolate (mesh triangolari), e le mesh tetraedri (mesh volumetriche – vedi più avanti) sono dette **complessi simpliciali**

58