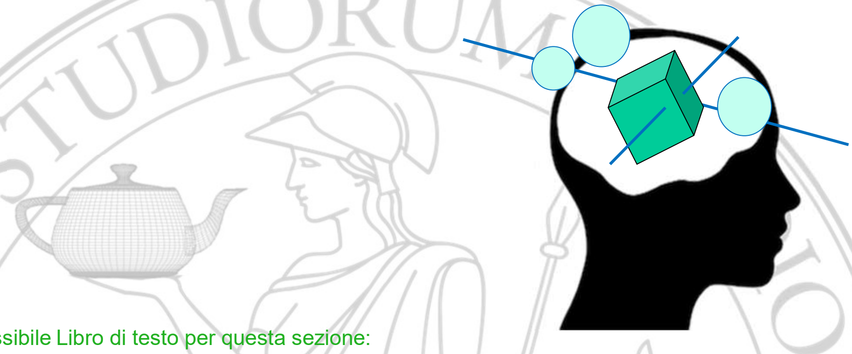
Marco Tarini - Computer Graphics 2024/2025
Università degli Studi di Milano

Vector and Point algebra part 2: prodotto cross



Possibile Libro di testo per questa sezione:
"Mathematics for 3D Game Programming and Computer Graphics, Third Edition"
Sezione 2.3

63

Prodotto Cross

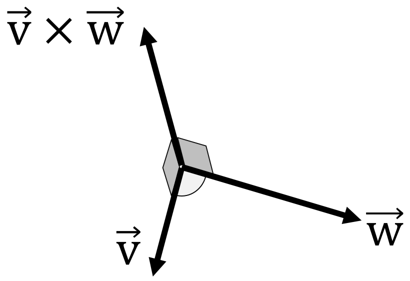
- ✓ Operazione da due vettori a vettore

$$\vec{v} \times \vec{w} = \begin{pmatrix} v_x \\ v_y \\ v_z \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} w_x \\ w_y \\ w_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} v_y\, w_z - v_z\, w_y \\ v_z\, w_x - v_x\, w_z \\ v_x\, w_y - v_y\, w_x \end{pmatrix}$$

- ✓ Detto anche:
  - ⇒Prodotto cross (perché si scrive con la crocetta)
  - ⇒Prodotto vettoriale (perché restituisce un vettore)
- ✓ Nel codice (librerie, linguaggi…) lo si può trovare scritto come: `cross(v,w)`
- ✓ E' definito solo in $\mathbb{R}^3$!

64

Prodotto cross e ortogonalità



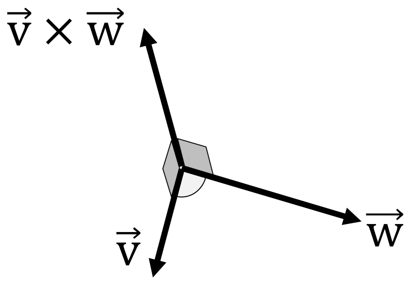
✓ Il prodotto cross fra $\vec{v}$ e $\vec{w}$ è sempre ortogonale sia a $\vec{v}$ che a $\vec{w}$

⇒Verificare, calcolando il dot fra $\vec{v} \times \vec{w}$ e $\vec{v}$, oppure $\vec{w}$

✓ Prodotto cross = operazione per generare un vettore ortogonale a due vettore dati

65

Direzione del prodotto cross



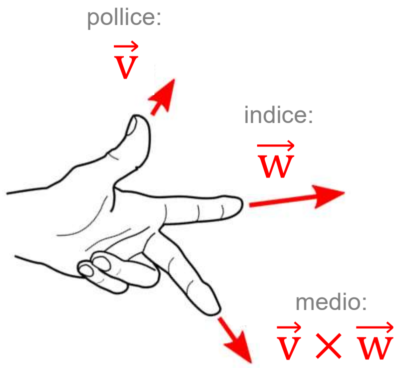
✓ Il prodotto cross fra $\vec{v}$ e $\vec{w}$ è sempre ortogonale sia a $\vec{v}$ che a $\vec{w}$

✓ Prodotto cross = operazione per generare un vettore ortogonale a due vettore dati

66

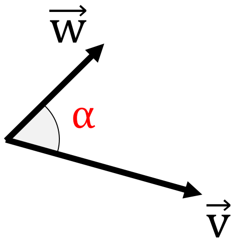
Verso del prodotto cross

- ✓ Abbiamo due direzioni ortogonale a due vettori dati (cioè al piano passante per quei due vettori), con due versi opposti.
- ✓ **In quale dei due versi sarà orientato il risultato del cross?**
- ✓ Dipende dall'ordine degli operandi!
- ✓ NB: Bisogna applicare la stessa mano usata per *immaginare* gli assi del sistema di riferimento usato per esprimere i vettori



67

Lunghezza del prodotto cross



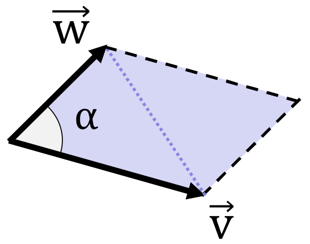
$$\|\vec{v} \times \vec{w}\| = \|\vec{v}\| \; \|\vec{w}\| \; \sin(\alpha)$$

l'angolo fra i due vettori,
che chiaramente è sempre fra 0° e 180°
(fra 0 e π radianti),
quindi il suo seno è positivo (o zero)

se $\hat{v}$ e $\hat{w}$ sono unitari: $\|\hat{v} \times \hat{w}\| = \sin(\alpha)$

68

Lunghezza del prodotto cross

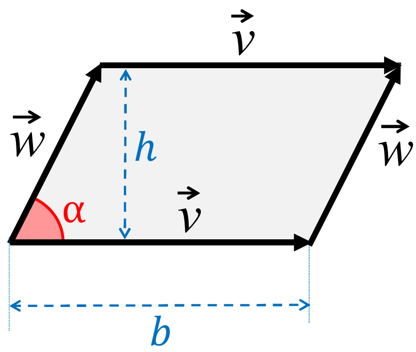


$$\|\vec{v} \times \vec{w}\| = \underbrace{\|\vec{v}\| \;\; \|\vec{w}\| \;\; \sin(\alpha)}$$

Nota: quindi, è l'area del parallelogramma
avente per lati $\vec{v}$ e $\vec{w}$
(cioè la *doppia area* del triangolo
avente quei due lati).
Lo stesso parallelogramma della regola della
somma vettoriale. Infatti…

69

Lunghezza del prodotto cross



$$\|\vec{v} \times \vec{w}\| \;=\; \underbrace{\|\vec{v}\|}_{\substack{b \\ \text{base}}} \cdot \underbrace{\|\vec{w}\| \cdot \sin(\,\alpha\,)}_{\substack{h \\ \text{altezza}}}$$

70

Prodotto cross, ortogonalità e allineamento

- ✓ Se $\vec{v}$ oppure $\vec{w}$ è degenere (vettori nulli) allora $\vec{v} \times \vec{w}$ è degenere (vettore nullo)
- ✓ Altrimenti:
  - ⇒ $\|\vec{v} \times \vec{w}\| = 0$ sse i due vettori sono allineati
    (sono nella stessa direzione, o in direzioni opposte)
- ✓ Siano $\hat{v}$ e $\hat{w}$ due vettori unitari. Allora
  - ⇒ $\hat{v} \times \hat{w}$ è unitario sse $\hat{v}$ e $\hat{w}$ sono ortogonali
  - ⇒ $\hat{v} \times \hat{w}$ è nullo sse $\hat{v}$ e $\hat{w}$
    sono coincidenti $\hat{v} = \hat{w}$
    oppure opposti $\hat{v} = -\hat{w}$
- ✓ Per qualisasi vettore $\hat{v}$,
  $\hat{v} \times \hat{v}$ = vettore degenere (vettore di zeri)

71

Prodotto cross: alcune proprietà

- ✓ Non commuta, anzi è **anti**commutativo:

$$\vec{v} \times \vec{w} = -\,\vec{w} \times \vec{v}$$

- ✓ E' lineare, cioè
  - ⇒ Distribuisce con la scalatura:

$$k\,(\vec{v} \times \vec{w}) = (k\,\vec{v}) \times \vec{w} = \vec{v} \times (k\,\vec{w})$$

  - ⇒ Distribuisce con la somma vettoriale:

$$\vec{w} \times (\vec{u} + \vec{v}) = \vec{w} \times \vec{u} + \vec{w} \times \vec{v}$$
$$(\vec{u} + \vec{v}) \times \vec{w} = \vec{u} \times \vec{w} + \vec{v} \times \vec{w}$$

72

Prodotto cross: alcune proprietà

- ✓ Quindi:

$$(-\vec{v}) \times \vec{w}$$
$$=$$
$$\vec{v} \times (-\vec{w})$$
$$=$$
$$-(\vec{v} \times \vec{w})$$
$$=$$
$$\vec{w} \times \vec{v}$$

- ✓ Infine, non è associativo: cioè (in generale)

$$\vec{a} \times (\vec{b} \times \vec{c}) \neq (\vec{a} \times \vec{b}) \times \vec{c}$$

73