

Marco Tarini - Computer Graphics 2024/2025  
Università degli Studi di Milano

## Vector and Point algebra part 3: prodotto dot



Libro di testo possibile:  
"Mathematics for 3D Game Programming  
and Computer Graphics, Third Edition"  
Sec 2.2

78

### Prodotto dot (operaz fra due vettori)

- ✓ «dot-product» **vettore**  $\times$  **vettore**  $\rightarrow$  **scalare**  
 $\Rightarrow$  detto anche prodotto scalare
- ✓ E' definito per tutte le dimensioni  
(vettori di qualsiasi numero di elementi)
- ✓ In tre dimensioni:

$$\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} d \\ e \\ f \end{pmatrix} = ad + be + cf$$


79

## Prodotto dot: intro

✓ Va da due **vettori** a uno **scalare**

$$\vec{v} \cdot \vec{w} \in \mathbb{R}$$

$$\vec{v} \cdot \vec{w} = (v_x, v_y, v_z) \cdot (w_x, w_y, w_z) = v_x w_x + v_y w_y + v_z w_z$$

- ⇒ Come stiamo per vedere, questa semplice operazione (esprimibile come un computo banale delle coordinate dei suoi operatori) è associata ad una semantica spaziale (e non solo) molto ricca
- ⇒ In particolare, a noi sarà molto utile come *test di ortogonalità*: fa 0 sse i due operatori sono ortogonali (formano un angolo retto) (oppure se almeno uno di loro è un vettore degenere)
- ⇒ Nota: il prodotto dot è definito in qualsiasi dimensione (con 2 - piani, 3 - spazi, o maggiore di 3 - iperspazi) e tutto quello che stiamo per dire vale in qualsiasi dimensione



80

## Prodotto dot: nomi alternativi

$$\vec{v} \cdot \vec{w} \in \mathbb{R}$$

$$\text{con } \vec{v}, \vec{w} \in \mathbb{R}^3$$

✓ E' detto anche:

- ⇒ Prodotto **dot** (perché si scrive con un puntino)
- ⇒ Prodotto **scalare** (perché restituisce uno scalare)
- ⇒ Prodotto «**riga-per-colonna**», se scrivo il primo vettore come riga e il secondo come colonna, cosa che posso scrivere ( $\vec{v}^T \vec{w}$ )
- ⇒ Prodotto **interno**



81

## Prodotto Dot: notazioni alternative

- ✓ Denotato anche come:

$$\vec{v} \cdot \vec{w}$$

nota il "pallino", che dà il nome al prodotto (non si omette!). Useremo questa notazione.

$$\langle \vec{v}, \vec{w} \rangle$$

$$\vec{v}^T \vec{w}$$

"Il trasposto di v (v come vettore riga, cioè una matrice 1x3) per il vettore colonna w" (cioè una matrice 3x1)

- ✓ Nel codice si trova (in linguaggi o librerie) con sinassi come:

`dot(v, w)`

funzione  
(metodo più comune)

`v.dot(w)`

metodo

`v*w`

operatore  
(infisso)



82

## Prodotto dot: alcune proprietà algebriche

- ✓ Commuta:

$$\vec{v} \cdot \vec{w} = \vec{w} \cdot \vec{v}$$

- ✓ E' lineare, cioè

⇒ Distribuisce con scalatura:

$$k (\vec{v} \cdot \vec{w}) = (k \vec{v}) \cdot \vec{w} = \vec{v} \cdot (k \vec{w})$$

⇒ Distribuisce con la somma vettoriale:

$$\vec{w} \cdot (\vec{u} + \vec{v}) = \vec{w} \cdot \vec{u} + \vec{w} \cdot \vec{v}$$

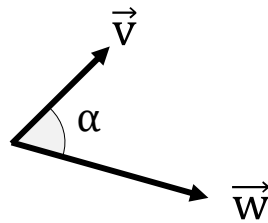
- ✓ Si può usare per riscrivere la norma:

$$\vec{v} \cdot \vec{v} = \|\vec{v}\|^2 \quad \text{cioè} \quad \|\vec{v}\| = \sqrt{\vec{v} \cdot \vec{v}}$$



83

## Prodotto dot e coseno



$$\vec{v} \cdot \vec{w} = \|\vec{v}\| \|\vec{w}\| \cos(\alpha)$$

quindi se  $\vec{v}$  e  $\vec{w}$   
non sono nulli:  $\vec{v} \cdot \vec{w} = 0 \iff$  **u e v ortogonali**

se  $\hat{v}$  e  $\hat{w}$   
sono unitari:  $\hat{v} \cdot \hat{w} = \cos(\alpha)$



84

## Prodotto dot e angolo

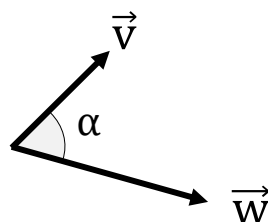
✓ Se  $\vec{v}$  oppure  $\vec{w}$  è degenere (vettore nullo)  
allora  $\vec{v} \cdot \vec{w} = 0$

✓ Altrimenti:

$\Rightarrow \vec{v} \cdot \vec{w} > 0$  i due vettori sono **concordi**,  $\alpha < 90^\circ$

$\Rightarrow \vec{v} \cdot \vec{w} = 0$  i due vettori sono **ortogonali**,  $\alpha = 90^\circ$

$\Rightarrow \vec{v} \cdot \vec{w} < 0$  i due vettori sono **discordi**,  $\alpha > 90^\circ$



85

## Prodotto dot fra vettori unitari

✓ Siano  $\hat{v}$  e  $\hat{w}$  due vettori unitari

✓ I due vettori sono...

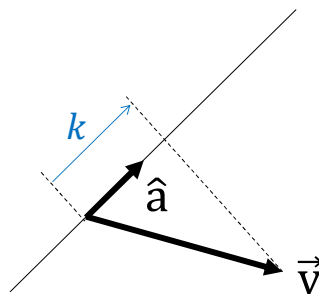
- ⇒sse  $\hat{v} \cdot \hat{w} = 1$  : coincidenti, cioè uguali
- ⇒sse  $0 < \hat{v} \cdot \hat{w} < 1$  : concordi (ma non uguali)
- ⇒sse  $\hat{v} \cdot \hat{w} = 0$  : ortogonali
- ⇒sse  $-1 < \hat{v} \cdot \hat{w} < 0$  : discordi (ma non opposti)
- ⇒sse  $\hat{v} \cdot \hat{w} = -1$  : opposti

✓ In pratica: fra vettori unitari,  
il prodotto dot è una **misura della somiglianza**  
fra i due vettori, da +1 a -1



86

## Prodotto dot e proiezione



$$k = \hat{a} \cdot \vec{v}$$

se  $\hat{a}$  è unitario:

$\hat{a} \cdot \vec{v} =$  estensione di  $\vec{v}$  in direzione  $\hat{a}$



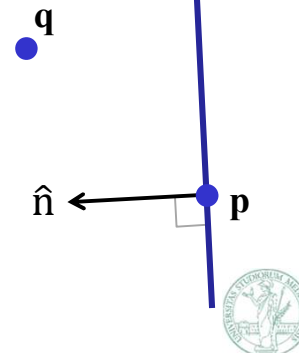
87

## Esercizio: test punto / piano

- ✓ Sia dato un piano passante per  $p$  con normale  $\hat{n}$ 
  - ⇒ normale = *vett unitario ortogonale al piano*
  - ⇒  $p$  punto,  $\hat{n}$  vettore unitario

*rappresenta  
il piano  
«visto di fianco»*

- ✓ Calcolare se un dato punto  $q$  ...
  - ⇒ giace sul piano
  - ⇒ si trova davanti al piano  
(è nel semispazio *davanti* al piano)
  - ⇒ si trova dietro al piano  
(è nel semispazio *dietro* al piano)



88

## Esercizio: test punto / piano

- ✓ Soluz:
  - $(Q - P) \cdot n = 0 \Leftrightarrow \alpha = 90^\circ \Leftrightarrow Q \text{ sul piano}$
  - $(Q - P) \cdot n < 0 \Leftrightarrow \alpha > 90^\circ \Leftrightarrow Q \text{ dietro}$
  - $(Q - P) \cdot n > 0 \Leftrightarrow \alpha < 90^\circ \Leftrightarrow Q \text{ davanti}$

- ✓ note:
  - ⇒ questo si estende a tutte le dimensioni  
(rette in  $R^2$ , piani in  $R^3$ , iperpiani in  $R^4$ ...)
  - ⇒ il test non richiede che  $n$  sia unitario,  
perché ci basta il *segno* del dot product
  - ⇒  $(Q - P) \cdot n = (Q \cdot n) - (P \cdot n)$   
e  $P \cdot n$  dipende solo dal piano
  - ⇒ cioè per testare (e memorizzare) il piano mi  
bastano  $n$  (una direzione) e lo scalare  $d = -(P \cdot n)$



89

## Esercizio: test punto / piano

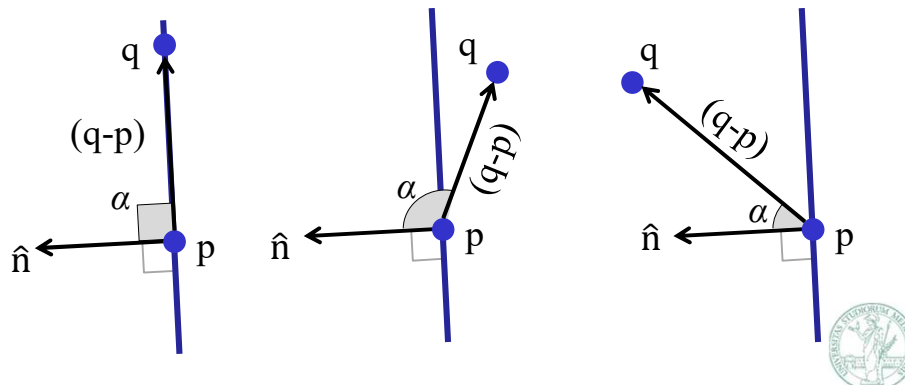
✓ Soluz:

$(\mathbf{q} - \mathbf{p}) \cdot \hat{\mathbf{n}} = 0 \Leftrightarrow \alpha = 90^\circ \Leftrightarrow \mathbf{q} \text{ sul piano}$

$(\mathbf{q} - \mathbf{p}) \cdot \hat{\mathbf{n}} < 0 \Leftrightarrow \alpha > 90^\circ \Leftrightarrow \mathbf{q} \text{ dietro al piano}$

$(\mathbf{q} - \mathbf{p}) \cdot \hat{\mathbf{n}} > 0 \Leftrightarrow \alpha < 90^\circ \Leftrightarrow \mathbf{q} \text{ davanti al piano}$

*dot product*

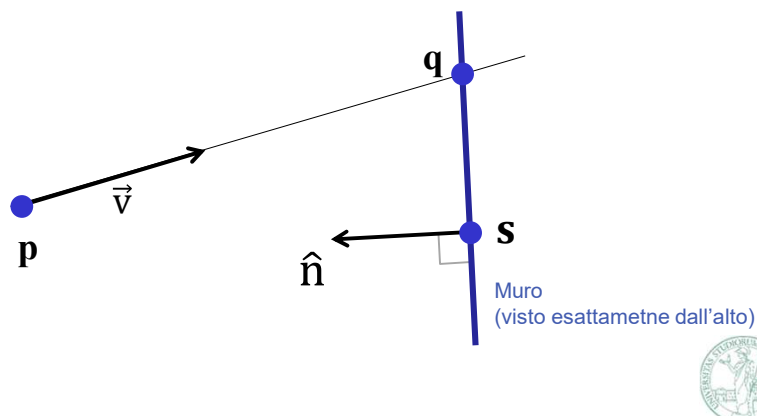


90

## Esercizio 2: intersezione retta piano

Una persona inizialmente punto  $\mathbf{p}$  si sposta del vettore  $\vec{\mathbf{v}}$  ogni secondo, in linea retta.

Davanti a se ha un muro passante per il punto  $\mathbf{s}$  con normale  $\hat{\mathbf{n}}$   
Trovare il punto  $\mathbf{q}$  di impatto persona / muro



91

## Traccia della soluzione e note

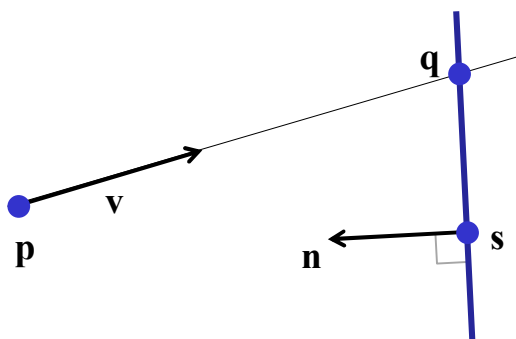
- ✓ Il muro (un piano) è definito da un punto appartenente al piano (qualsiasi) e la sua normale
- ✓ Il vettore  $\vec{v}$  rappresenta la velocità della persona
- ✓ A tempo  $t$ , la persona ha fatto  $t$  passi in direzione  $\vec{v}$
- ✓ Sia  $t$  il tempo di impatto (incognita). Allora
$$q = p + t \vec{v}$$
- ✓ Sappiamo che  $q$  è sul piano. Allora il vettore  $(q - s)$  è ortogonale alla normale del piano
$$(q - s) \cdot \hat{n} = 0$$
- ✓ Sostituendo, otteniamo
$$(p + t \vec{v} - s) \cdot \hat{n} = 0$$
- ✓ Risolvendo per  $t$  ottengo...
$$t = \frac{(s-p) \cdot \hat{n}}{\vec{v} \cdot \hat{n}}$$
- ✓ Sapendo  $t$  ricostruisco  $q$  come  $p + t \vec{v}$



92

## Variante: Intersezione Raggio / Piano

trovare l'intersezione **q** (se c'è) fra  
un **raggio** che parte dal punto **p** e prosegue in direzione **v**  
e un piano passante per il punto **s** con normale **n**



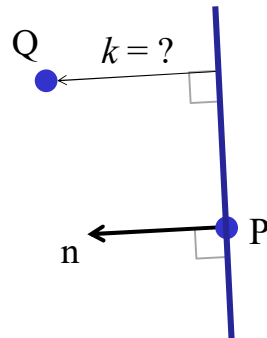
Stessa soluzione, ma se  $t$  risulta negativa, non c'è intersezione



93

### Esercizio: distanza con segno di punto da piano

- ✓ Sia dato un piano  $(p, n)$ 
  - ⇒ piano passante per il punto  $p$
  - ⇒ avente come normale il vettore unitario  $n$
- ✓ Calcolare la distanza di un punto  $q$  dal piano



95

### Esercizio: distanza con segno da piano

- ✓ Soluz:
$$k = (q - p) \cdot n$$
- ✓ note:
  - ⇒  $k$  = estensione del vettore  $q-p$  in direzione  $n$
  - ⇒ è richiesto che direzione  $n$  sia unitaria
  - ⇒ questa è la distanza **con segno (signed distance)**:
  - ⇒ positiva se  $q$  davanti, negativa se  $q$  dietro al piano
  - ⇒ la distanza è 0 quando  $q$  giace sul piano (verificare)
  - ⇒ se si vuole una vera distanza (scalare non negativo) basta prendere  $|k|$



96