

Una (imperfetta) categorizzazione dei tipi di modelli digitali 3D

		ELEMENTI DISCRETI			CONTINUI
		regolari «a griglia»	semi-regolari o irregolari		
			elementi simpliciali	elementi non simpliciali	
SUPERFICIALI	2-manifold «rappresenta una vera superficie»	Height Field Range Scan	Triangle Mesh	Polygonal Mesh Quad Mesh Quad dominant Mesh	Subdivision surfaces Parametric Surfaces
	non-manifold «non rappresenta una sup»	Set di Range Scan	Point Cloud		
VOLUMETRICI	(3-manifold)	Voxelized Volume Volumetric Textures	Tetra Mesh	Hexa Mesh	Implicit models (es. CSG)

1

Marco Tarini - Computer Graphics 2025/2026
 Università degli Studi di Milano

Subdivision Surfaces:
 parte A: curve di suddivisione

2

Suddivisione di una curva (in 2D o 3D): l'idea

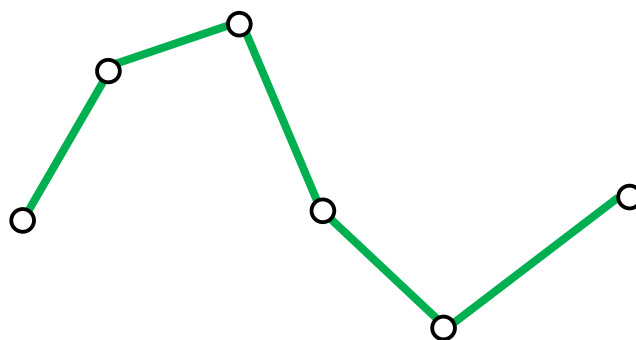
- ✓ Osservazione: una linea curva può essere approssimata da una linea spezzata
 - ⇒ Una successione di vertici (2D oppure 3D) connessi da segmenti *dritti*
 - ⇒ La sua risoluzione è il numero di segmenti (oppure vertici) usati
 - ⇒ (così come una tri-mesh è un set di vertici 3D connessi da facce *piatte*)
- ✓ Suddividere (to *subdivide*) una data linea spezzata: procedimento *automatico* per ottenere una versione più hi-res
 - ⇒ creando nuovi vertici (a partire dai vecchi)
 - ⇒ sostituendo ad ogni segmento un certo numero di segmenti più piccoli
 - ⇒ secondo uno specifico algoritmo o «schema» (ne esistono molti)
- ✓ Effetto:
 - ⇒ Aumenta la risoluzione (l'inverso di una semplificazione automatica)
 - ⇒ Ottengo una linea spezzata via via più smooth (liscia)
- ✓ Curva limite:
 - ⇒ Ripetendo il procedimento (quante volte si vuole) ci avvicina sempre di più ad un'ipotetica «**curva limite**»
 - ⇒ Che è effettivamente curva, non «lineare (dritta) a tratti»



3

Curve subdivision: esempio di schema

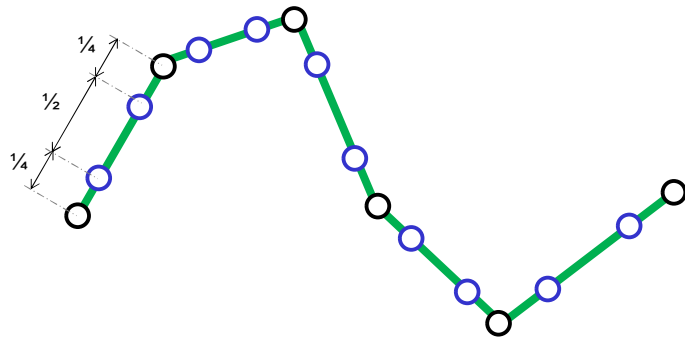
- ✓ Linea spezzata base



4

Curve subdivision: esempio di schema

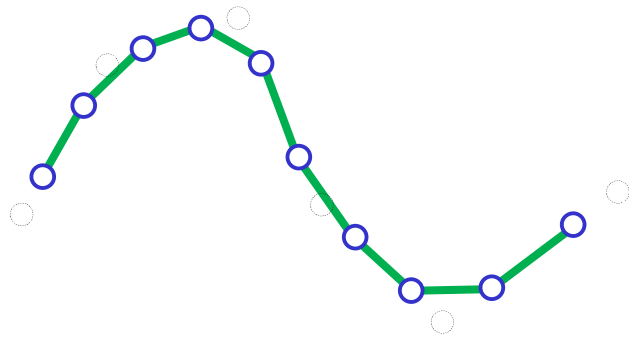
✓ Introduciamo due nuovi vertici per segmento



5

Curve subdivision: esempio di schema

✓ Rimuoviamo i vertici precedenti



7

Curve subdivision: esempio di schema

✓ Esempio con una curva chiusa

curva «limite»

1 passo

1 passo

1 passo

...

8

Suddivisione di una curva (in 2D o 3D): l'idea

✓ La linea spezzata originale (che è «dritta» a tratti) è dunque un modo per rappresentare una linea incurvata

- ⇒ La curva limite
- ⇒ Che può essere riprodotta tanto fedelmente quanto si vuole
- ⇒ Per esempio, può essere suddivisa alla bisogna solo in fase di rendering
- ⇒ Un artista può ad esempio modificare la curva in questione modificando la linea spezzata originale

✓ Uno *schema di suddivisione* è una ricetta per effettuare 1 passo

- ⇒ Definisce come ottenere la nuova **geometria**, cioè una formula per ottenere le posizioni dei nuovi vertici
- ⇒ Definisce cosa fare dei vecchi vertici (per es, se scartarli, spostarli, lasciarli inalterati, o altro), e come connettere i vecchi e nuovi vertici

✓ *Estenderemo fra poco questo concetto alle superfici*

- ⇒ *Per ora, vediamo il caso delle curve (definite in 2D o in 3D)*

9

Classi di schemi di interpolazione

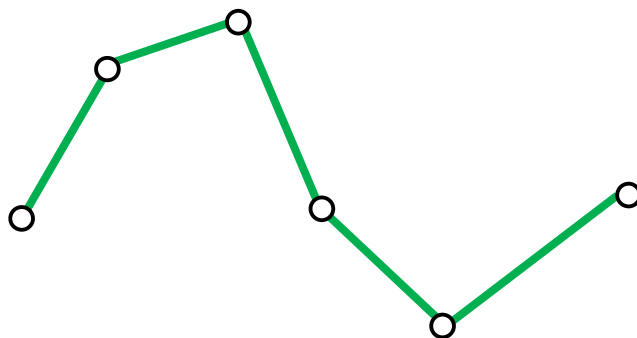
- ✓ Lo schema visto è un esempio di schema detto «**duale**», ad indicare che i vecchi vertici vengono scartati
 - ⇒ Spiegazione del termine: i vecchi segmenti sono mantenuti (in versione più corta), e si aggiunge un nuovo **segmento** per ogni **vertice** originale [verifica disegno!]
[in una linea spezzata, i segmenti sono i «duali» dei vertici, e viceversa]
 - ⇒ sinonimo: anche detto «**corner cutting**»: la curva suddivisa «taglia gli angoli» passando da un nuovo vertice ad un altro «tagliando» i vecchi vertici
- ✓ Vediamo altri tipi di schema, in cui i vecchi vertici invece *non* vengono scartati
 - ⇒ Dopo il passo di suddivisione, nella curva suddivisa troviamo sia i nuovi vertici che i vecchi (quelli originali)
 - ⇒ I vertici originali potranno essere invece: spostati (schemi «**approssimativi**») oppure lasciati inalterati (schemi «**interpolativi**»)



10

Schema approssimativo: idea

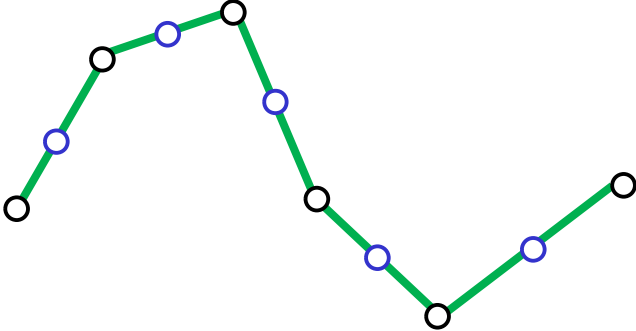
- ✓ Linea spezzata originale (passo 0)




11

Schema approssimativo: idea

✓ Aggiungere i nuovi vertici (interpolando)



Nota: ogni segmento viene suddiviso ma la geometria non viene cambiata



12

Schema approssimativo: idea

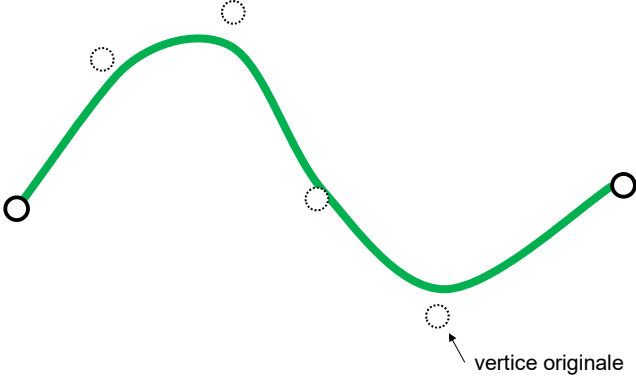
✓ Smooth: spostare i *vecchi* vertici verso la media dei loro vicini




13

Schema approssimativo: idea

- ✓ Ripetere fino a raggiungimento curva limite



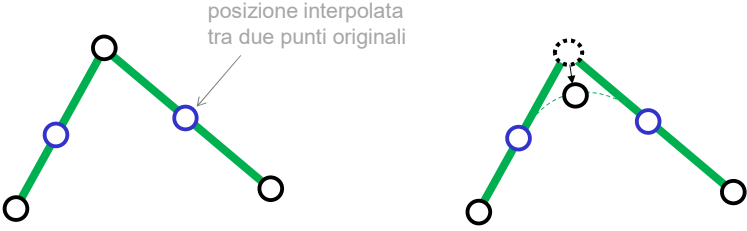
vertice originale



14


Schema aprossimativo: idea

- ✓ Ad ogni passo di suddivisione, si aggiungono nuovi vertici *in posizioni interpolate* fra i vertici originali
- ✓ Al fine di incrementare la smoothness, è necessario spostare i vecchi vertici verso una interpolazione dei loro vicini



posizione interpolata tra due punti originali

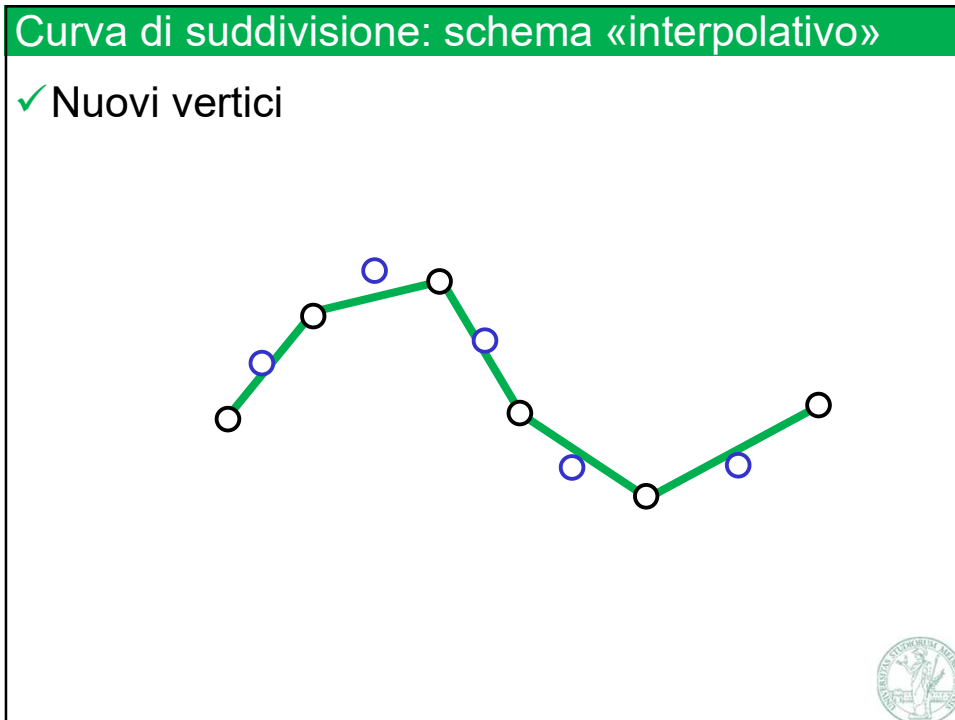
- ✓ Conseguenza: la curva finale **NON** passa per i vertici originali. Ci passa solo vicino, *approssimando*.



16




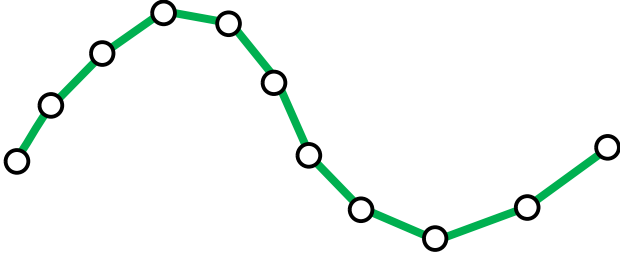
17



18

Curva di suddivisione: schema «interpolativo»


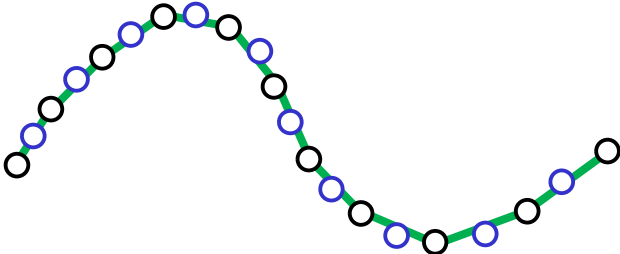
✓ Nuovi segmenti (sostituiscono i vecchi)



19

Curva di suddivisione: schema «interpolativo»


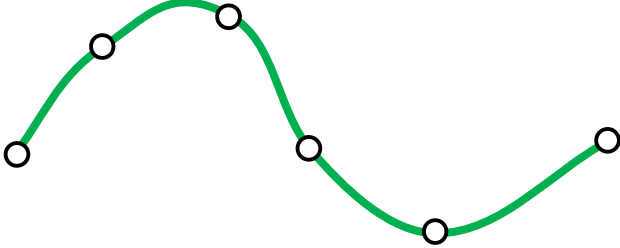
✓ Nuovo passo di suddivisione



20

Curva di suddivisione: schema «interpolativo»

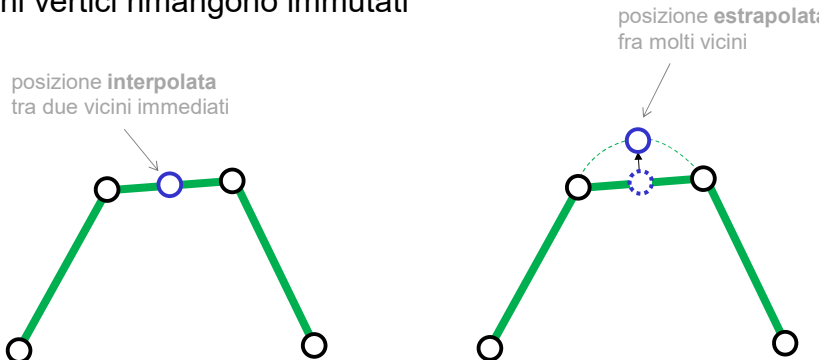
- ✓ Etc.. fino ad arrivare alla *curva limite*



21

Schema interpolativo: idea intuitiva


- ✓ Ad ogni passo di suddivisione, si aggiungono nuovi vertici fra i vertici del passo precedente
- ✓ I vecchi vertici rimangono immutati



posizione **interpolata**
tra due vicini immediati

posizione **estrapolata**
fra molti vicini

- ✓ Al fine ottenere una curva smooth, le nuove pos saranno non solo *interpolate* fra i vicini immediati, ma anche allontanate (quindi *estrapolate*) da quelli più lontani



23


Schemi di suddivisione: riepilogo

✓ Si dividono in

- ⇒ **duali** (o «**corner cutting**»):
 - i vertici originali vengono scartati
 - (i nuovi segmenti connettono solo i nuovi vertici)
- ⇒ **interpolativi**:
 - nuovi vertici vengono aggiunti,
 - i vertici originali sono mantenuti alle stesse coordinate
- ⇒ **approssimativi**:
 - nuovi vertici vengono aggiunti,
 - i vertici originali sono spostati

La nuova curva **interpola**, nel senso di "passa attraverso", i vertici originali

La nuova curva **approssima**, nel senso di "passa vicino a", i vertici originali




24

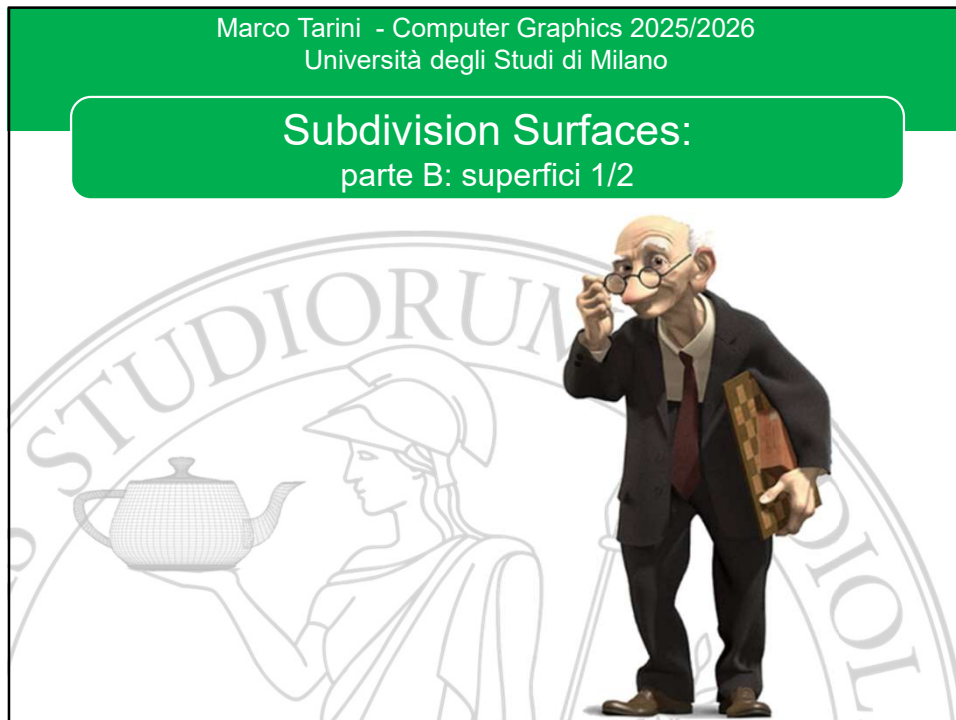
Schemi di suddivisione per curve: in 2D o in 3D?

✓ Gli schemi descritti funzionano sia per curve definite in 2D (come tratti di penna impressi su un foglio) che curve definite in 3D (come «spaghetti volanti» nello spazio)

- ⇒ In termini matematici:
 - per one-manifold sia embedded in 2D, che embedded in 3D
 - ⇒ («two-manifold»: «che somiglia ad un piano 2D localmente»)
 - ⇒ («one-manifold»: «che somiglia ad una linea 1D localmente»)
 - ⇒ («embedded»: immersi, che galleggiano in uno spazio)
- ✓ L'unica differenza è che i vertici (vecchi e nuovi) sono definiti da punti 2D (con coordinate x,y) oppure 3D (con coordinate x,y,z)
 - ⇒ I nuovi vertici ottenuti da un passo di suddivisione sono comunque le stesse interpolazioni o estrapolazioni dei vecchi
- ✓ Lo schema si applica anche a qualsiasi attributo definito sui vertici originali, se presente
 - ⇒ Per esempio, colore per vertice
 - ⇒ Ottengo gli attributi dei nuovi vertici con la stessa interpolazione o estrapolazione di quelli originali



25



26

Suddivisione di una mesh

- ✓ Quanto visto per le curve si estende facilmente alle mesh poligonali
- ✓ Suddividere (*subdivide*) una mesh M : un semplice procedimento **automatico** per ottenere una versione più ad hi-res di M , e più smooth, suddividendo ogni poligono di M in poligoni più piccoli
- ✓ Esistono molti schemi di suddivisione diversi
- ✓ Un dato schema prescrive:
 - ⇒ come ottenere la nuova **connettività** (quali nuovi vertici aggiungere, come connettere vecchi e/o nuovi vertici con nuove facce)
 - ⇒ come ottenere la nuova **geometria** (e attributi) dei vertici (attraverso interpolazione/estrapolazione dei vecchi)

27

Subidivision surface

- ✓ Iterando il processo di suddivisione, si converge verso una «superficie limite»
- ✓ Differenze principali fra schemi di suddivisione:
 - ⇒ Interpolativi VS Approssimativi VS Duali (come visto per le curve)
 - ⇒ Poligonalità della mesh richiesta in input, e prodotta in output
 - Sono tri-mesh? Sono quad-mesh?
 - Sono mesh poligonali generiche?
 - ⇒ Caratteristiche della superficie limite, in termini di smoothness (continuità di normale e/o di curvatura)



28

Schemi di suddivisione per mesh: differenze

- | | |
|---------------------------------|---------------------------------|
| ✓ Operano da: | ✓ Ottenengo: |
| ⇒ tri-mesh, <i>oppure</i> | ⇒ tri-mesh, <i>oppure</i> |
| ⇒ polygonal mesh, <i>oppure</i> | ⇒ polygonal mesh, <i>oppure</i> |
| ⇒ pure-quad mesh | ⇒ pure-quad mesh |
- ✓ Connettività:
 - ⇒ quali nuovi vertici produrre?
 - ⇒ come connetterli con nuove facce ed edge?
 - ✓ Geometria:
 - ⇒ come ottenere le coordinate (e se serve gli attributi) dei nuovi vertici (a partire dai vertici originali?)
 - ⇒ solo per schemi approssimativi: dove spostare i vertici originali?




29

Classificazione di 4 schemi di suddivisione comuni

	per tri-Mesh	Per mesh poligonali generiche
Interpolativi	Butterfly	
Approssimativi	Loop	Catmull-Clark (produce sempre pure quad-mesh)
Duali		Doo-Sabin (produce mesh poligonali)

(non è una lista esaustiva)





30

Schemi di suddivisione per tri-mesh

✓ Gli schemi di suddivisione per tri-mesh elencati usano lo schema detto "da 1 a 4". Ogni passo:

- ⇒ crea un nuovo vertice su ogni edge, che lo spezza in 2
- ⇒ connette i nuovi vertici con nuovi edge
- ⇒ suddivide ogni faccia triangolare in 4 sottofacce

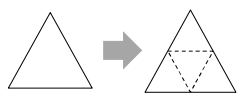


32

Incremento risoluzione degli schemi per tri-mesh

- ✓ Mesh iniziale:
 - ⇒ V vertici ($\sim n$)
 - ⇒ F facce ($\sim 2n$)
 - ⇒ E edge ($\sim 3n$)

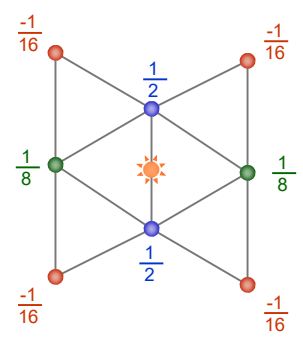
come sappiamo,
 una mesh di triangoli con
 n vertici ha in media
 $2n$ facce
 $3n$ edge
- ✓ Dopo un passo:
 - ⇒ (V + E) vertici ($= \sim 4n$)
 - ⇒ (4F) facce ($= \sim 8n$)
 - ⇒ (2E + 3F) edge ($= \sim 12n$)


- ✓ Quindi ogni passo: risoluzione $\times 4$ (quadruplica)
 - ⇒ La stessa conclusione varrà anche per la maggior parte degli altri schemi di suddivisione per superfici

33


Schema "butterfly": geometria

- ✓ Posizione (e attributi) di ogni nuovo vertice...



$$\begin{aligned}
 \text{POS}(\text{star}) &= \frac{1}{2} \text{POS}(\text{blue top}) + \frac{1}{2} \text{POS}(\text{blue bottom}) \\
 &+ \frac{1}{8} \text{POS}(\text{green left}) + \frac{1}{8} \text{POS}(\text{green right}) \\
 &+ \frac{-1}{16} \text{POS}(\text{red top-left}) + \frac{-1}{16} \text{POS}(\text{red top-right}) + \frac{-1}{16} \text{POS}(\text{red bottom-left}) + \frac{-1}{16} \text{POS}(\text{red bottom-right})
 \end{aligned}$$

è una
estrapolazione



34

Esempio di suddivisione "butterfly"

La superficie limite...

- è molto smooth
- passa per i vertici originali
- (in questo esempio) è quasi sferica

1 passo

1 passo

...

35

Esempio di suddivisione "butterfly"

E' uno schema di suddivisione:

- da tri-mesh a tri-mesh
- 1 a 4
- interpolativo

36