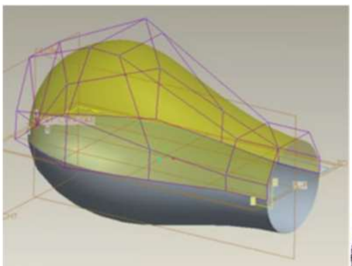
Una (imperfetta) categorizzazione dei tipi di modelli digitali 3D

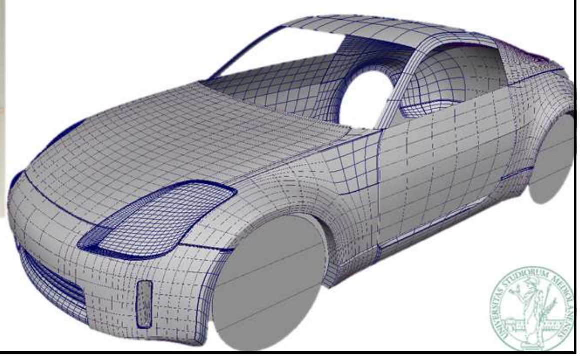
		ELEMENTI DISCRETI			CONTINUI
		regolari *«a griglia»*	semi-regolari o irregolari		
			elementi simpliciali	elementi non simpliciali	
SUPERFICIALI	2-manifold *«rappresenta una vera superficie»*	**Height Field** **Range Scan** **Geometry Images**	**Triangle Mesh**	**Polygonal Mesh** **Quad Mesh** **Quad dominant Mesh**	**Subdivision surfaces** **Parametric Surfaces**
	non-manifold *«non rappresenta una sup»*	**Set di Range Scan**	**Point Cloud**		
VOLUM ETRICI	(3-manifold)	**Voxelized Volume** **Volumetric Textures**	**Tetra Mesh**	**Hexa Mesh**	**Implicit models** **(es. CSG)**

2

Superfici parametriche

- ✓ Modo di rappresentare superfici curve
- ✓ Non solo «lineari a tratti» (come le mesh) ma «quadratiche (o cubiche, o quartiche) etc. a tratti»
- ✓ Molto utilizzato per CAD/CAM





4

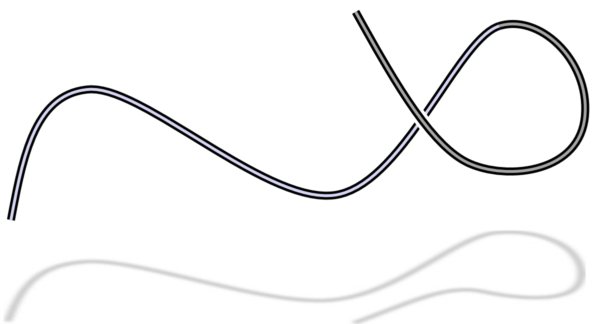
Marco Tarini - Computer Graphics 2025/2026
Università degli Studi di Milano

Parametric Curves 1/2

5

Curve parametriche

- ✓ Vediamo prima un caso più facile (pure molto usato): le curve parametriche
  - ⇒ Una rappresentazione per linee curve (in 2D oppure 3D)
- ✓ Il caso superfici sarà una sua generalizzazione



6

Miniripasso su terminologia delle funzioni in generale

Una funzione
Il dominio di f
Il codominio di f

$$f\colon \mathrm{A} \to \mathrm{B}$$

$$f(a) = b$$

$a \in \mathrm{A}$ $\qquad$ $b \in \mathrm{B}$

Immagine di f :
insieme di elementi del codominio di f raggiunti da f

$$\text{immagine}(f) \;=\; \{b \in \mathrm{B}\,.\; \exists\; a \in \mathrm{A}.\, f(a) = b\}$$

Esempio: $f\colon \mathbb{N} \to \mathbb{N},\;\; f(x) = 2x$
dominio di f : numeri naturali
codominio di f : numeri naturali
immagine di f : numeri naturali pari

7

Curva parametrica

✓ Curva descritta come immagine di una funzione

$$f\colon \mathrm{A} \to \mathrm{B}$$
$$\mathrm{A} \subseteq \mathbb{R}$$
$$\mathrm{B} = \mathbb{R}^2 \;o\; \mathbb{R}^3$$

✓ $\mathrm{B} = \mathbb{R}^2$ curve in 2D
(linee curve disegnte su di un foglio)

✓ $\mathrm{B} = \mathbb{R}^3$ curve in 3D
(linee curve che “fluttuano” nello spazio)

$$f(t) = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

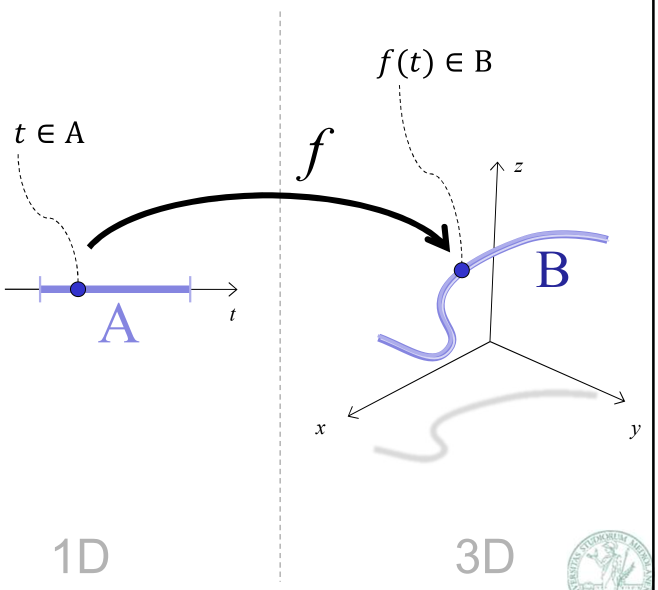
$$f(t) = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

✓ La curva è quindi
“l’immagine di una funzione da $\mathbb{R}$ a $\mathbb{R}^2$ (oppure a $\mathbb{R}^3$)”
- ⇒ t è detto il parametro, o la posizione parametricha
- ⇒ A, il dominio di f , è detto il “dominio parametrico”
- ⇒ B, l’immagine di f , è la nostra curva (un luogo di punti)

8

Curva parametrica

$$f : A \rightarrow B$$
$$A \subseteq \mathbb{R}$$
$$B \subseteq \mathbb{R}^3$$

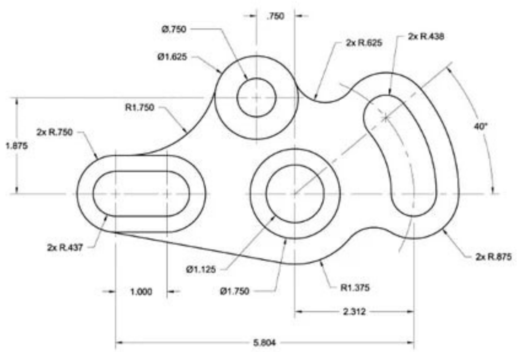


$$f(t) = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

9

Usi delle curve parametriche: in 2D

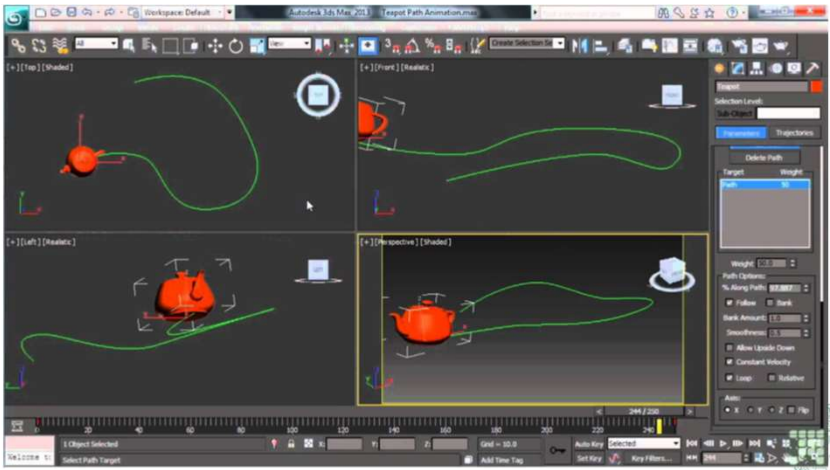
✓ Design di grafica vettoriale, come CAD 2D



10

Usi delle curve parametriche: in 3D (e anche 2D)

- ✓ in Computer Animation: rappresenta la traiettoria di un oggetto
  - ⇒ la coordinata parametrica t può rappresentare il tempo
  - ⇒ $f(t)$ = la posizione dell'oggetto al tempo t



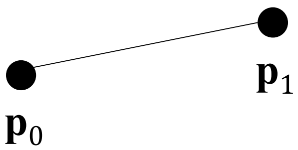
12

Esempio giocattolo:

- ✓ Un segmento dritto come "curva" parametrica
  - ⇒ (in questo caso, non è "curva", cioè non ha curvatura)
  - ⇒ Il **segmento** che unisce due punti $\mathbf{p}_0$, $\mathbf{p}_1$
    è il luogo di punti raggiunti dalla funzione

$$f(t) = \mathbf{p}_0 + (\mathbf{p}_1 - \mathbf{p}_0) \cdot t$$

$$= \mathbf{p}_0 \cdot (1 - t) + \mathbf{p}_1 \cdot t$$



14

Note sull'esempio giocattolo…

- ✓ In generale, in qualsiasi curve parametriche:
  - ⇒ la **coordinata parametrica** t è la variabile della funzione f .
    cioè, $f(t)$ è il punto sulla curva di coordinata parametrica t
  - ⇒ i «**punti di controllo**» (qui: $\mathbf{p}_0$ e $\mathbf{p}_1$) sono costanti nella formula di f
    (sono detti di controllo perché, modificandoli, modifico la forma della curva -- qui: il segmento)
- ✓ In tutti gli esempi che vedremo:
  - ⇒ il **dominio parametrico**, in cui varia t, è definito dall'intervallo $[0,1]$
    (cioè, i numeri reali fra 0 e 1)
  - ⇒ quindi $f(0)$ è l'inizio della curva e $f(1)$ è la sua fine
- ✓ Nell'esempio giocattolo… (ma non in generale)
  - ⇒ i punti di controllo sono 2 (in generale, sono di più)
  - ⇒ la curva è in realtà dritta
  - ⇒ tutti i punti di controllo fanno parte della curva
  - ⇒ i due punti di controllo coincidono con l'inizio e fine
- ✓ Vediamo esempi più interessanti

15

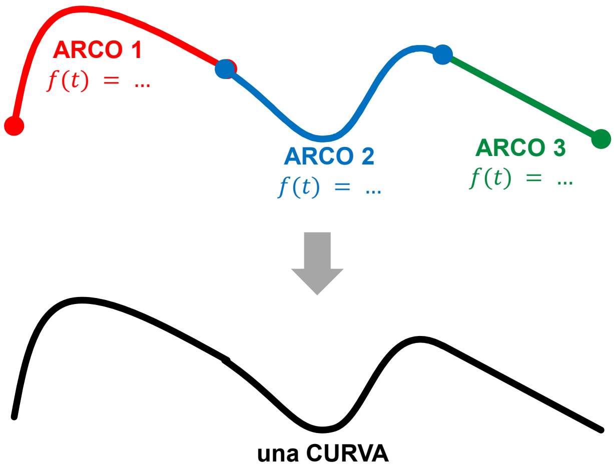
Le curve parametriche usate nell'industria

- ✓ Sono stati proposti diverse funzioni, come:
  - ⇒ Hermite Splines
  - ⇒ **Bézier splines** ← In questo corso, ci limitiamo a queste
  - ⇒ B-splines
  - ⇒ NURBS (polinomi razionali)
- ✓ Differiscono nella funzione f definita,
  e quindi
  nelle caratteristiche della curva risultante

18

Curve e archi

- ✓ Possiamo ottenere curve parametriche più complesse unendo dei sotto pezzi di curva, detti **archi**, alle loro estremità
- ✓ Una curva (paramterica) = insieme di archi (parametrici) fusi alle estremità
- ✓ Concentriamoci per ora sulla definizione dei singoli archi



19

Spline e curve di Bèzier

- ✓ Le curve di Bézier (che stiamo per vedere) sono un caso particolare di **spline**
- ✓ Gli **archi** di una spline sono una curva parametriche definite da una funzione
  con funzione $f(t)$ **poliniomiale** in $t \in [0,1]$
  - ⇒Con polinomi di un certo grado *n*

coordinata parametrica

$$\Rightarrow f(t) = P_0(t)\,\mathbf{p}_0 + P_1(t)\,\mathbf{p}_1 + P_2(t)\,\mathbf{p}_2 + \cdots$$

polinomi in t

punto di controllo

- ✓ Il numero di **punti di controllo** è tanto maggiore col crescere del grado

20

Primo esempio di curva di Bézier

- ✓ L'esempio «giocattolo» visto sopra (il segmento) è già un primo esempio di **arco di spline** il cui
  - ⇒ i polinomi usati sono: $P_0(t) = (1 - t)$ e $P_1(t) = t$
  - ⇒ sono quindi di grado 1 (funzioni lineari)
  - ⇒ la spline è di grado 1
  - ⇒ abbiamo due punti di controllo $\mathbf{p}_0$ e $\mathbf{p}_1$
- ✓ E' anche un esempio di **arco di Bézier**
  - ⇒ è infatti l' "arco di Bézier di grado 1"
- ✓ Possiamo definire archi di Bézier di qualsiasi grado
  - ⇒ Un arco di Bézier di grado n è sempre controllato da $n + 1$ punti di controllo
  - ⇒ Next: vediamo come è definito l'arco di Bézier di grado 2

21

Arco di Bézier di grado 2

Questa modo di scrivere la funz di **Bézier** è dovuta a **Paul De Casteljau** e dunque porta il suo nome.

- ✓ Dati tre «control point» $\mathbf{p}_0, \mathbf{p}_1, \mathbf{p}_2$
- ✓ Data la coordinata parametrica $t \in [0..1]$,
- ✓ Trovo (passo 1)
  - ⇒ il punto $\mathbf{q}_0$ interpolando fra $\mathbf{p}_0$ e $\mathbf{p}_1$ (con t)
  - ⇒ il punto $\mathbf{q}_1$ interpolando fra $\mathbf{p}_1$ e $\mathbf{p}_2$ (con t)
- ✓ Infine (passo 2)
  - ⇒ ottengo il punto finale $f(t)$ interpolando fra $\mathbf{q}_0$ e $\mathbf{q}_1$ (di nuovo con t)

Esercizio 1: comporre un disegno «a mano» seguendo le istruzioni sopra, con da $\mathbf{p}_0, \mathbf{p}_1, \mathbf{p}_2$ scelti a piacere su un foglio, e trovando «graficamente» $f(t)$ con $t = \frac{1}{2}, \frac{2}{3}, 0$, e 1

Esercizio 2: svolgere i conti e trovare i polinomi in t. Verificare che sono di grado 2

22