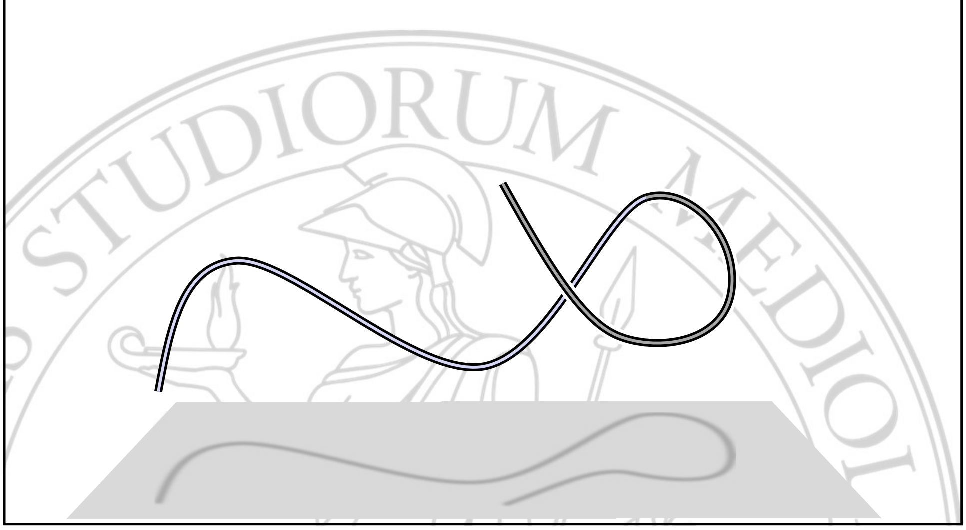
Marco Tarini - Computer Graphics 2025/2026
Università degli Studi di Milano

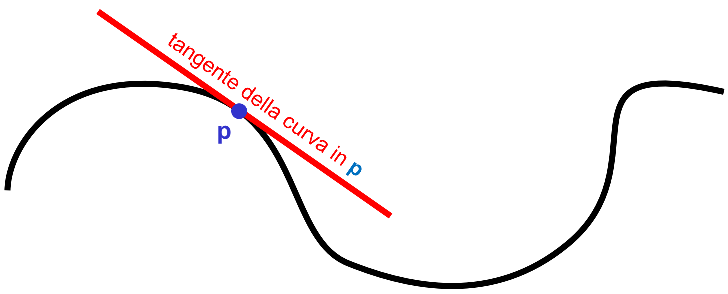
Parametric Curves 2/2



24

Curve paramteriche: quale direzione tangente?

- ✓ Data una curva e un punto **p** su di essa,
  la retta tangente è la retta che è passa per **p** e
  ha lo stesso orientamento della curva in **p**
- ✓ La direzione tangente è la direzione della retta tangente



- ✓ Vediamo come calcolare la direzione tangente per un dato punto su di una curva parametrica
  - ⇒ Esercizio: applica poi la regola per trovare la dir tangente nell'esempio giocattolo, e verifica che la risposta è quella che ci si aspetterebbe

28

Curve paramteriche: quale direzione tangente?

- Dato un parametro t , il punto $f(t)$ è sulla curva (per costruzione).
- Quale vettore è tangente della curva in quel punto?
- Dobbiamo chiederci di quanto si sposta il punto $f(t)$ quando t incrementa di un piccolo delta ε
- Risposta:
  - ⇒ si sposta nel punto $f(t+\varepsilon)$
  - ⇒ cioè si sposta del vettore $f(t+\varepsilon) - f(t)$
  - ⇒ dividendo per ε, ottengo lo spostamento (ancora un vettore) per *unità di incremento* della variabile parametrica t

$$\frac{f(t+\varepsilon) - f(t)}{\varepsilon}$$

  - ⇒ il limite con $\varepsilon \to 0$ è il vettore tangente che cerco
  - ⇒ cioè la derivata f' di f calcolata in t : $f'(t)$
  - ⇒ Se normalizzo, ottengo la direzione (vettore unitario)

$$\frac{f'(t)}{\|f'(t)\|}$$ = direzione tangente della curva nel punto $f(t)$

29

Curve di Bézier

- Le curve di Beziér sono definite per qualsiasi grado n
  - ⇒ E hanno $n+1$ punti di controllo
- Abbiamo due modi *equivalenti* di definire la formula per un arco di bezier di Beziér (per un qualsiasi grado n):
  - ⇒ La formulazione «grafica» (di DeCasteljau), quella che abbiamo visto: interpolazione lineare iterata
  - ⇒ La formulazione matematica originale, che definisce i pesi da usare per interpolare i punti di controllo come un certo polinomio di grado n in t (anni '50, Pierre Beziér). La calcoleremo dalla prima.
- Un cenno storico:
  - ⇒ le curve di Beziér sono nate per progettare le fusoliere delle automobili.

33

Curve di Bézier di grado 3 (ripasso)

- ✓ Ho tre **control point** $\mathbf{p}_0, \mathbf{p}_1, \mathbf{p}_2$
- ✓ Data la **coordinata parametrica** $t \in [0..1]$, trovo :
  - ⇒il punto $\mathbf{q}_0$ **interpolando** fra $\mathbf{p}_0$ e $\mathbf{p}_1$ (con t)
  - ⇒il punto $\mathbf{q}_1$ **interpolando** fra $\mathbf{p}_1$ e $\mathbf{p}_2$ (con t)
- ✓ Infine
  - ⇒ottengo il punto finale $f(t)$ **interpolando** fra $\mathbf{q}_0$ e $\mathbf{q}_0$ (di nuovo con t)

Demo: http://www.malinc.se/m/DeCasteljauAndBezier.php

34

Formulaz. di De Casteljau: esempio per grado 3

- ✓ 4 **control point** $\mathbf{p}_0, \mathbf{p}_1, \mathbf{p}_2, \mathbf{p}_3$
- ✓ data una **posizione parametrica** t ,trovo:
  - ⇒il punto $\mathbf{q}_0$ interpolando fra $\mathbf{p}_0$ e $\mathbf{p}_1$ (con t)
  - ⇒il punto $\mathbf{q}_1$ interpolando fra $\mathbf{p}_1$ e $\mathbf{p}_2$ (con t)
  - ⇒il punto $\mathbf{q}_2$ interpolando fra $\mathbf{p}_2$ e $\mathbf{p}_3$ (con t)
- ✓ poi
  - ⇒il punto $\mathbf{r}_0$ interpolando fra $\mathbf{q}_0$ e $\mathbf{q}_1$ (con t)
  - ⇒il punto $\mathbf{r}_1$ interpolando fra $\mathbf{q}_1$ e $\mathbf{q}_2$ (con t)
- ✓ e infine
  - ⇒il punto finale $f(t)$ interpolando fra $\mathbf{r}_0$ e $\mathbf{r}_1$ (con t)

Demo: http://www.malinc.se/m/DeCasteljauAndBezier.php

35

Curva di Bezier di grado 3 in forma di codice

L'algoritmo di De Casteljau ci fornisce un modo per codificare la funzione f in modo semplice:

```
vec3 bezier( float t, // coordinata parametrica
             vec3 p0, vec3 p1,
             vec3 p2, vec3 p3)
{
   vec3 q0 = mix(p0,p1, t);   // cioè
                              // p0*(1-t)+p1*t
   vec3 q1 = mix(p1,p2, t);
   vec3 q2 = mix(p2,p3, t);
   vec3 r0 = mix(q0,q1, t);
   vec3 r1 = mix(q1,q2, t);
   return mix( r0, r1, t);
}
```

36

Formulazione equivalente di Bèzier (del grado 2)

- Per De Casteljau: $f(t) = (1-t)\mathbf{q}_0 + t\,\mathbf{q}_1$

  con $\mathbf{q}_0 = (1-t)\mathbf{p}_0 + t\,\mathbf{p}_1$

  e $\mathbf{q}_1 = (1-t)\,\mathbf{p}_1 + t\,\mathbf{p}_2$
- Sostituendo, otteniamo questa riscrittura:

$$f(t) = (1-t)^2\mathbf{p}_0 + 2\,(1-t)\,t\,\mathbf{p}_1 + t^2\mathbf{p}_2$$

  ⇒che è di grado 2 (t compare al quadrato: t^2)
- Riscrivibile, usando $\bar{t} = 1-t$, come:

$$f(t) = \bar{t}^2\mathbf{p}_0 + 2\,\bar{t}\,t\,\mathbf{p}_1 + t^2\mathbf{p}_2$$

  ⇒dove $\bar{t} = 1-t$ ($\bar{t}$ è il «complementare» di t)

  ⇒cioè $\bar{t} + t = 1$

37

Formulazione equivalente di Bèzier (grado 3)

$\bar{t} = 1 - t$

- Per De Casteljau: $f(t) = \bar{t}\,\mathbf{r}_0 + t\,\mathbf{r}_1$

con $\mathbf{r}_0 = \bar{t}\,\mathbf{q}_0 + t\,\mathbf{q}_1$
e $\mathbf{r}_1 = \bar{t}\,\mathbf{q}_1 + t\mathbf{q}_2$

con $\mathbf{q}_0 = \bar{t}\,\mathbf{p}_0 + t\,\mathbf{p}_1$
e $\mathbf{q}_1 = \bar{t}\,\mathbf{p}_1 + t\,\mathbf{p}_2$
e $\mathbf{q}_2 = \bar{t}\,\mathbf{p}_2 + t\,\mathbf{p}_3$

- Sostituendo tutto, otteniamo questa riscrittura:

$$f(t) = \bar{t}^3\mathbf{p}_0 + 3\,\bar{t}^2 t\,\mathbf{p}_1 + 3\,\bar{t}\,t^2\,\mathbf{p}_2 + t^3\mathbf{p}_3$$

…che è un polinomio cubico in t

38

Curve Bézier cubiche: codice ottimizzato

```
vec3 bezier( float t,
             vec3 p0, vec3 p1,
             vec3 p2, vec3 p3)
{
   float k = 1.0-t;
   return  (k*k*k)*p0 +
       (3.0*k*k*t)*p1 +
       (3.0*k*t*t)*p2 +
           (t*t*t)*p3 ;
}
```

40

Gli end-point degli archi di Bèzier e loro tangenti

- ✓ Gli end-point di arco di Bèzier coincidono con il primo e l'ultimo punto di controllo
  - ⇒ E' banale da verificare usando le formule sopra!
  - ⇒ Gli endpoints sono con $t = 0$, $\bar{t} = 1$
    e con $t = 1$, $\bar{t} = 0$
- ✓ Come sono le direz. tangenti nei due end-point?
  - ⇒ Quanto vale la derivata f' nei punti parametrici $t = 0$ e $t = 1$
- ✓ La risposta (calcolando le derivate) è :
  - ⇒ all'inizio dell'arco, la tangente è orientata come il vettore che connette il 1mo pt. di controllo al 2do
  - ⇒ alla fine dell'arco, la tangente è orientata come il vettore che connette il penultimo pt. di controllo all'ultimo
- ✓ Vale per tutti i gradi (verificare per i gradi 2 e 3)

42

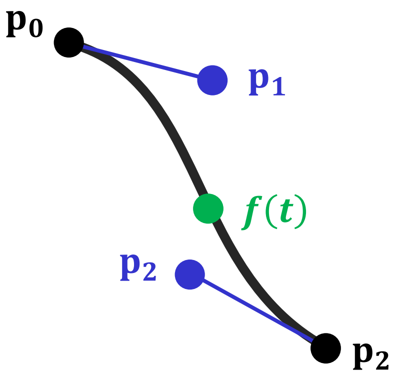
Curve di Bézier cubiche: le più usate

- ✓ Le curve di Bézier cubiche (cioè di grado 3) sono molto conveniente da usare. Infatti…
- ✓ In ogni arco, ho quattro punti *distinti* che controllano la curva in modo intuitivo. I quattro punti controllano:
  - ⇒ Posizione e orientamento all'inizio della curva (i primi due)
  - ⇒ Posizione e orientamento alla fine della curva (gli ultimi due)
- ✓ Confronta con gli altri gradi:
  - ⇒ Coi gradi <3, non posso manipolare le due direzioni tangenti in modo indipendente una dall'altra
  - ⇒ I gradi > 3 sono ridondanti per la maggior parte degli usi.
    (meglio concatenare tanti archi di grado tre)
- ✓ Le curve cubiche sono ideali per fondere gli «archi» in una sola spline, detta «Bezièr curve» (o Bezièr path)
  - ⇒ Posso far coincidere le direzioni tangenti per ottenere una curva smooth

43

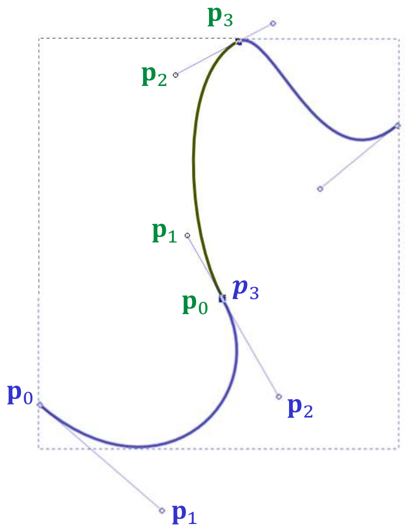
Bézier cubiche (un arco): recap

$$
\begin{aligned}
f(t) = &\quad\;\; (1-t)^3\; \mathbf{p_0} \\
&+ 3\,t\; (1-t)^2\; \mathbf{p_1} \\
&+ 3\,t^2\; (1-t)\; \mathbf{p_2} \\
&+ t^3\; \mathbf{p_3}
\end{aligned}
$$



44

Concatenare archi Bézier arch: *Bézier curve (o path)*



Se end-points coincidono ($\mathbf{p}_3 = \mathbf{p}_0$): curva continua C0

Se, inoltre ($\mathbf{p}_2 , \mathbf{p}_3 = \mathbf{p}_0 , \mathbf{p}_1$) sono allineati: curva continua con direz di tangente continua, cioè C1 (curva “smooth”- “liscia”)

45

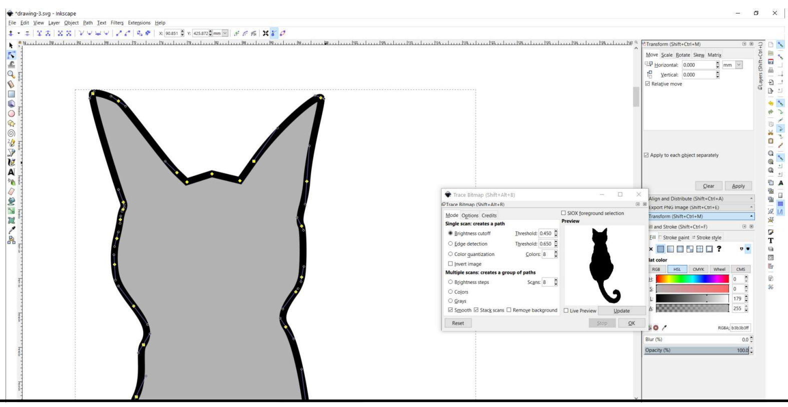
Curve di Bézier nel mondo

- ✓ Usatissime:
  - ⇒ nel disegno 2D (moltissime applicazioni)
  - ⇒ nel formato SVG (per immagini vettoriali 2D)
    (è anche un formato standard del Web!)
  - ⇒ nella specifica della forma delle lettere in un font
  - ⇒ ideale per path di un'animazione:
    basta specificare posizione e velocità in una serie di punti sul percorso!
- ✓ Programma Open Source per sperimentare:
  - ⇒ Inkscape (http://inkscape.org)
  - ⇒ Test: disegnare una curva (chiamata path in Inkscape), salvare il progetto in formato SVG, e analizzare il file risultante come file di testo

46

Un esperimento che sei inivato a tentare

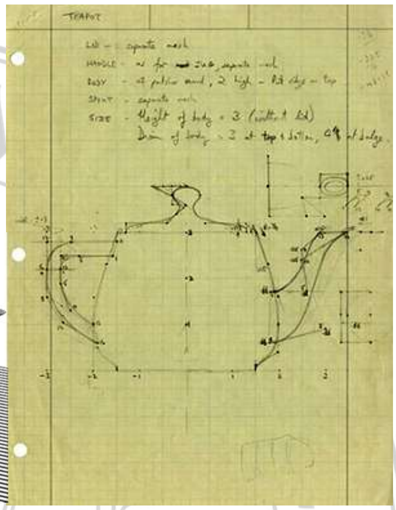
- ✓ Procurati inkscape (link nella pagina del corso)
- ✓ Procurati un'immagine raster ("di pixel") di due colori, per esempio un logo
- ✓ Importala ("import bitmap").
- ✓ "Path" => "Trace bitmap" ("path" è come viene chiamata una Bézier curve)
- ✓ Questo transforma l'immagine in una curva di Bézier cubica
- ✓ Editala per modificarla (bottone)



47

Marco Tarini - Computer Graphics 2025/2026
Università degli Studi di Milano

Parametric **Surfaces**



50

Superfici parametriche

- ✓ Siamo ora pronti per estendere le curve parametriche alle superfici parametriche

$$f : A \rightarrow B$$

dominio parametrico (A) — immagine di f (B)

$A \subseteq \mathbb{R}$ $B \subseteq \mathbb{R}^2$	$A \subseteq \mathbb{R}$ $B \subseteq \mathbb{R}^3$	$A \subseteq \mathbb{R}^2$ $B \subseteq \mathbb{R}^3$
B è una curva parametrica nel piano	B è una curva parametrica nello spazio	B è una **superficie** parametrica nello spazio

51

Superficie Parametrica

$f : \mathrm{A} \rightarrow \mathbb{R}^3$

$\mathrm{A} \subseteq \mathbb{R}^2$ dominio parametrico

$\mathrm{B} \subseteq \mathbb{R}^3$ immagine di f

Superficie Parametrica:
immagine di una funzione da un dominio in R^2 a R^3

per definirne una, scegliere una funzione (e il suo dominio A) (il "dominio parametrico")

$$f\begin{pmatrix} s \\ t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

" x,y,z sono calcolate come formule di s,t "

" x,y,z sono le coordinate cartesiane di $f(s,t)$ "

" s,t, sono le coordinate parametriche dello stesso punto"

52

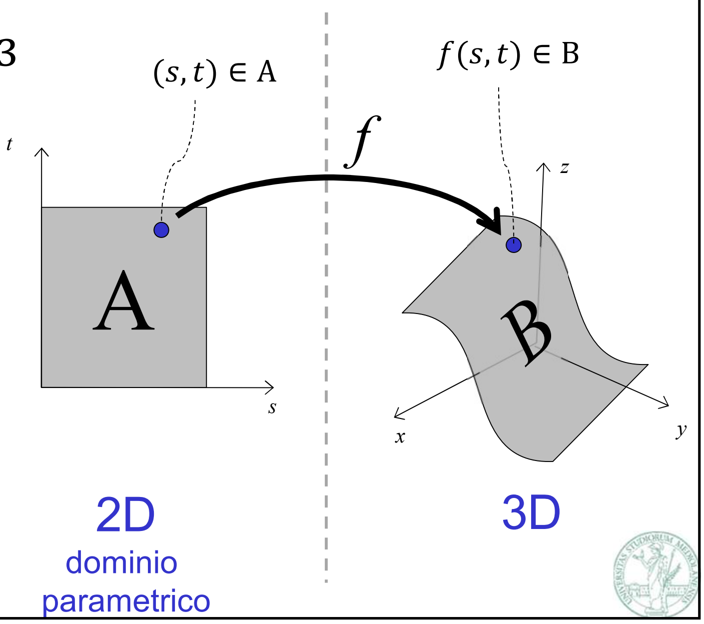
Superficie Parametrica

$f : \mathrm{A} \rightarrow \mathbb{R}^3$

$\mathrm{A} \subseteq \mathbb{R}^2$

$\mathrm{B} \subseteq \mathbb{R}^3$

$$f\begin{pmatrix} s \\ t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$



53

Sup. parametriche: convenzioni e terminologia

- ✓A = Dominio Parametrico = il dominio di f
  - ⇒Definito come regione di uno spazio bimensionale
  - ⇒Spesso, per convenzione,
    definito come il quadrato [0..1]x[0..1]
  - ⇒Per distinguere le sue coordinate da quelle usate come spazio oggetto (*x*,*y*,*z*), le chiamiamo *s*, *t* (a volte, *u* e *v*)
  - ⇒Come per le coordinate delle tessiture
- ✓B = immagine di f
  - ⇒Il luogo di punti raggiungibili da f a partire da A
  - ⇒Definisce la superficie parametrica

55

Bézier patches di grado 2 (o quadratiche)

- ✓Ho una griglia di (N+1)×(N+1) pts di controllo…
  - ⇒Es: con N = 2 ho: $p_{0,0}$ $p_{1,0}$ $p_{2,0}$
    $p_{0,1}$ $p_{1,1}$ $p_{2,1}$
    $p_{0,2}$ $p_{1,2}$ $p_{2,2}$
- ✓Con N = 2, algoritmo per trovare $\mathrm{p} = f(s,t)$
  - ⇒cioè la pos 3D del punto di coord parametriche (s, t)
- ✓procedo così:
  - ⇒trovo a come $f(t)$ sulla Bézier curve $p_{0,0}$ $p_{1,0}$ $p_{2,0}$
  - ⇒trovo b come $f(t)$ sulla Bézier curve $p_{0,1}$ $p_{1,1}$ $p_{2,1}$
  - ⇒trovo c come $f(t)$ sulla Bézier curve $p_{0,2}$ $p_{1,2}$ $p_{2,2}$
  - ⇒trovo p come $f(s)$ sulla Bézier curve $\mathrm{a,b,c}$

59

Bézier patches grado 3 «Bi-cubic Bézier patches»

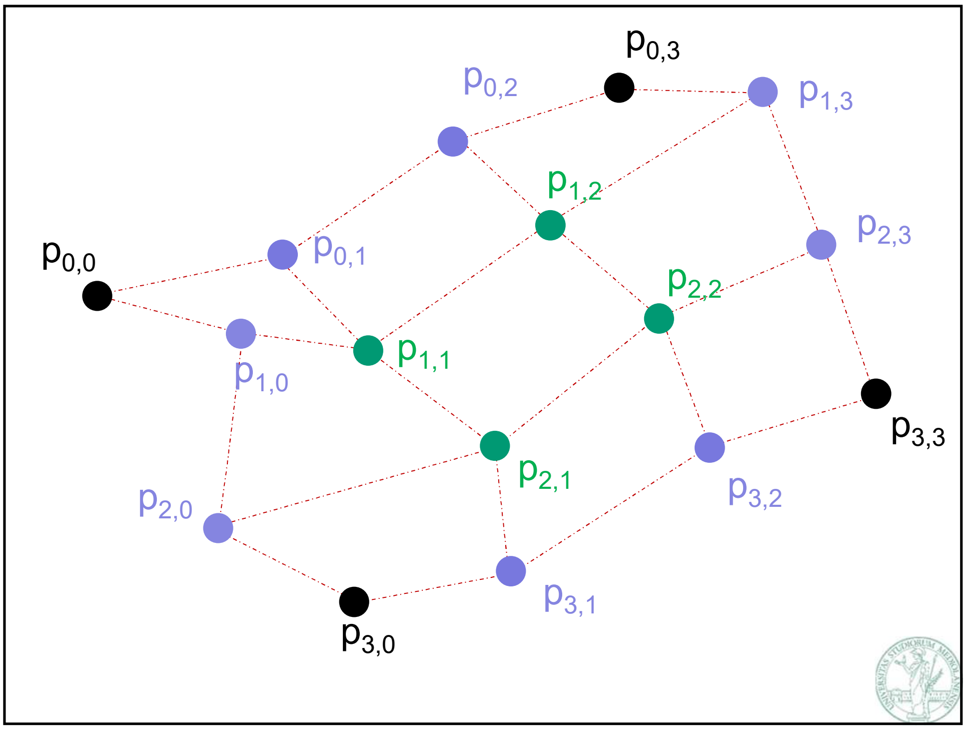
- Algoritmo per trovare $p = f(s,t)$:
  - ⇒ trovo a come $f(t)$ sulla Bèzier curve $p_{0,0}$ $p_{1,0}$ $p_{2,0}$ $p_{3,0}$
  - ⇒ trovo b come $f(t)$ sulla Bèzier curve $p_{0,1}$ $p_{1,1}$ $p_{2,1}$ $p_{3,1}$
  - ⇒ trovo c come $f(t)$ sulla Bèzier curve $p_{0,2}$ $p_{1,2}$ $p_{2,2}$ $p_{3,2}$
  - ⇒ trovo d come $f(t)$ sulla Bèzier curve $p_{0,3}$ $p_{1,3}$ $p_{2,3}$ $p_{3,3}$
  - ⇒ trovo p come $f(s)$ sulla Bèzier curve a,b,c,d
- Oppure, equivalentemente :
  - ⇒ trovo a come $f(s)$ sulla Bèzier curve $p_{0,0}$ $p_{0,1}$ $p_{0,2}$ $p_{0,3}$
  - ⇒ trovo b come $f(s)$ sulla Bèzier curve $p_{1,0}$ $p_{1,1}$ $p_{1,2}$ $p_{1,3}$
  - ⇒ trovo c come $f(s)$ sulla Bèzier curve $p_{2,0}$ $p_{2,1}$ $p_{2,2}$ $p_{2,3}$
  - ⇒ trovo d come $f(s)$ sulla Bèzier curve $p_{3,0}$ $p_{3,1}$ $p_{3,2}$ $p_{3,3}$
  - ⇒ trovo p come $f(t)$ sulla Bèzier curve a,b,c,d

60

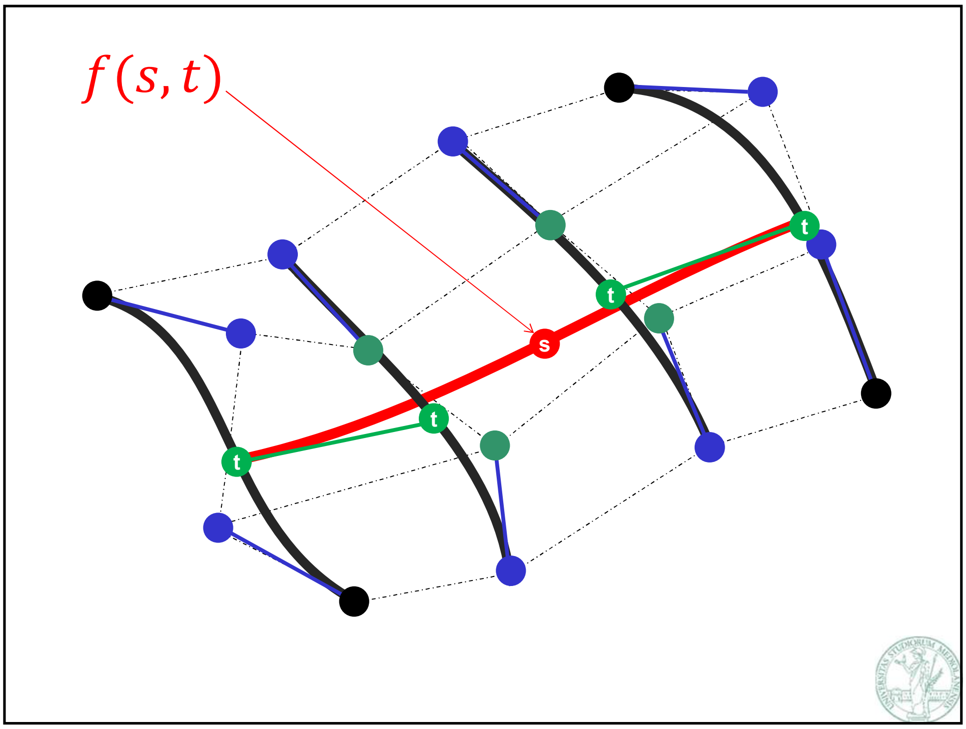
Bezier patches grado 3 «Bi-cubic Bézier patches»

- N = 3
- Griglia di 4x4 vertici di controllo
  - ⇒ $p_{0,0}$ $p_{1,0}$ $p_{2,0}$ $p_{3,0}$
    $p_{0,1}$ $p_{1,1}$ $p_{2,1}$ $p_{3,1}$
    $p_{0,2}$ $p_{1,2}$ $p_{2,2}$ $p_{3,2}$
    $p_{0,3}$ $p_{1,3}$ $p_{2,3}$ $p_{3,3}$
- Passa per i 4 angoli (è interpolante su loro)
  p0,0 p0,3 p3,0 p3,3
- E' approssimante sugli altri punti
- E detto anche «Bi-Cubico» perché è cubico sia sulla s, che sulla t

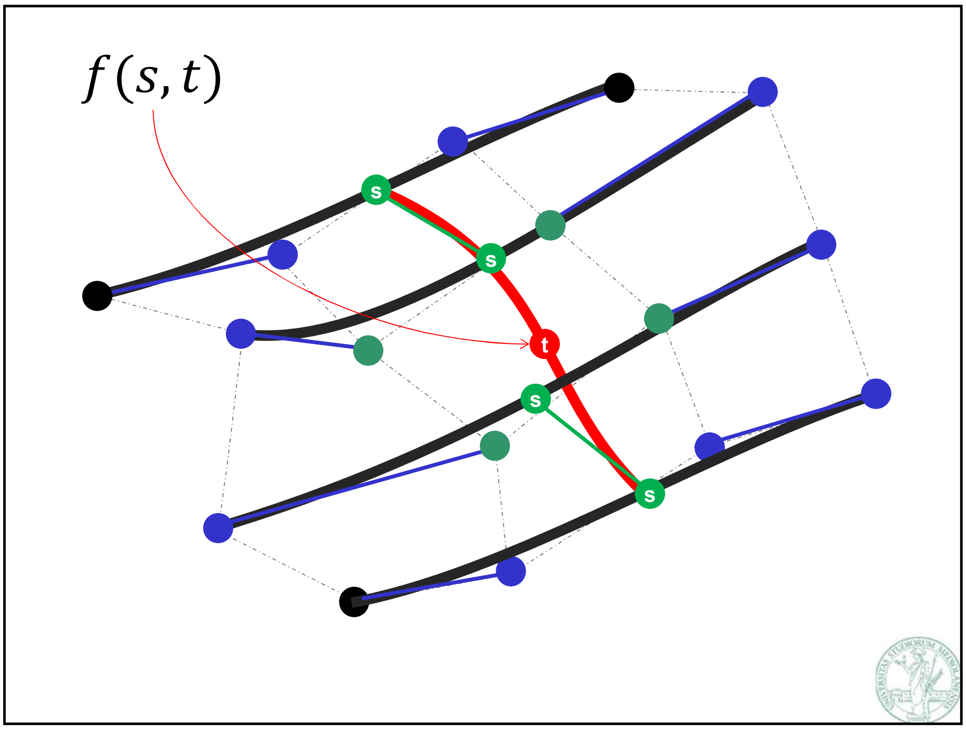
61


$p_{0,3}$
$p_{0,2}$
$p_{1,3}$
$p_{1,2}$
$p_{0,0}$
$p_{0,1}$
$p_{2,3}$
$p_{2,2}$
$p_{1,1}$
$p_{1,0}$
$p_{3,3}$
$p_{2,1}$
$p_{2,0}$
$p_{3,2}$
$p_{3,1}$
$p_{3,0}$

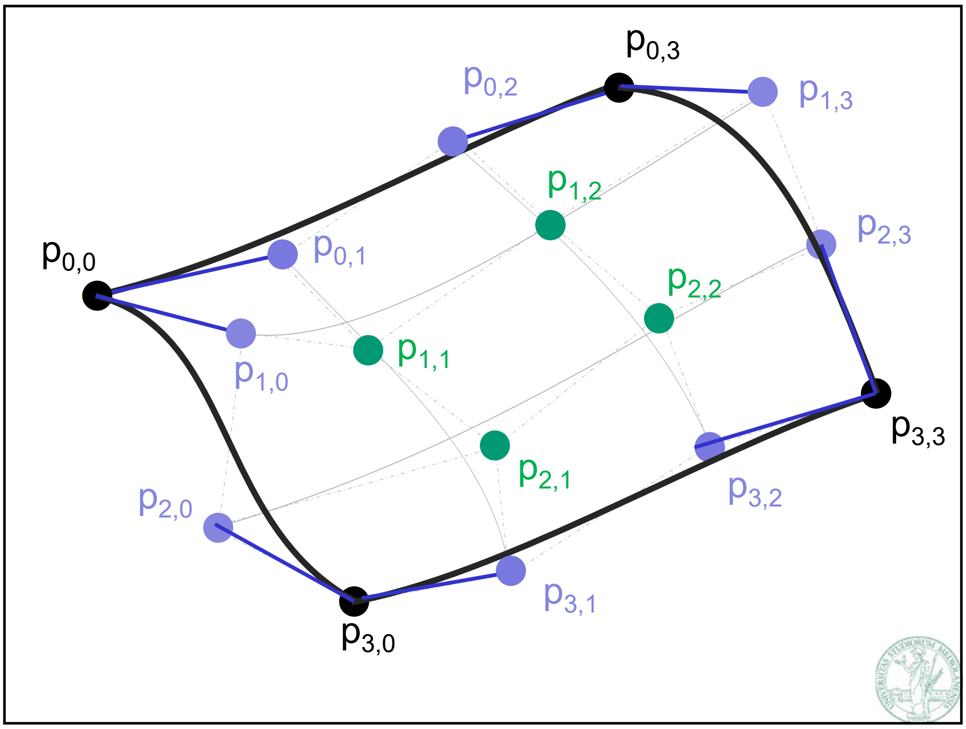
62


$f(s,t)$
t
t
s
t
t

63

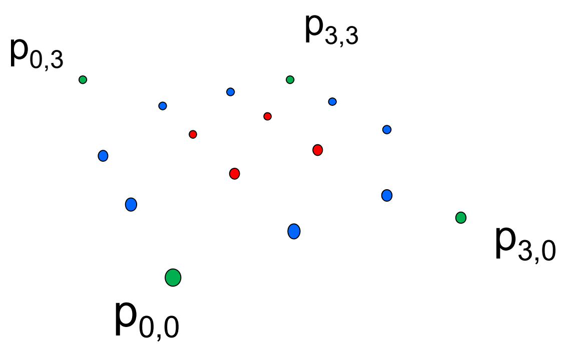

$f(s,t)$
s
s
t
s
s

64


$p_{0,3}$
$p_{0,2}$
$p_{1,3}$
$p_{1,2}$
$p_{2,3}$
$p_{0,0}$
$p_{0,1}$
$p_{2,2}$
$p_{1,1}$
$p_{1,0}$
$p_{3,3}$
$p_{2,1}$
$p_{2,0}$
$p_{3,2}$
$p_{3,1}$
$p_{3,0}$

65

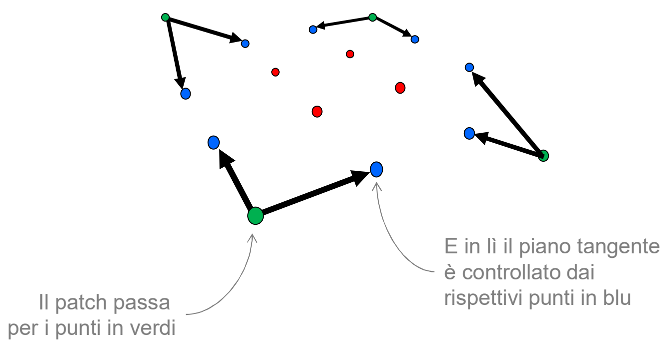
Bi-cubic Bézier patches: esempio



4x4 punti di controllo

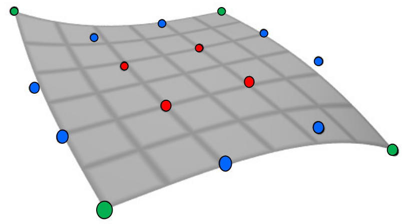
66

Bi-cubic Bézier patches



67

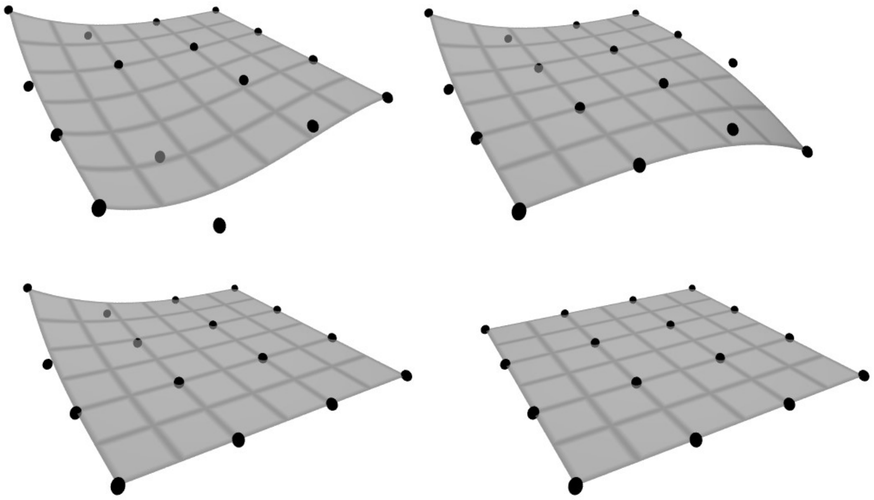
Bi-cubic Bézier patches



Patch di bezier

68

Cubic Bézier patches: esempi



Modificando I punti di controllo, modifico il patch. Prova, con:

http://kovacsv.github.io/JSModeler/documentation/examples/bezier.html

69

Superifici di Bézier

✓ Così come una **curva** (o un **path**) di Bézier è costituito da molti **archi** connessi, una **superficie** di Bézier è costituita da molti **patch** connessi sui loro lati

- ⇒ Nuovamente, il matching dei punti di controllo sul bordo garantisce che la superficie sia continua, senza gaps
- ⇒ Inoltre, imporre la colinearità fra i punti di controllo interni garantisce che la superficie non abbia crease (discontinuità di normale), cioè che sia smooth (lisca) – laddove questo sia l'effetto desiderato!

70

Lo zoo delle superfici parametriche

✓ Anche gli altri tipi di splines sono estendibili a patch, nello stesso modo:

- ⇒ Hermite Splines
- ⇒ Bezier splines
- ⇒ B-splines
- ⇒ NURBS

✓ Le NURBS in particolare sono molto utilizzate in contesto CAD 3D

71

Superifici parametriche: i benefici

- ✓ Controllabili, intuitive da modellare, ottime per il design
  - ⇒ Queste superfici so ideali per il design
  - ⇒ Soprattutto di tipo industriale / artificiale (CAID – Computer-aided industrial design)
  - ⇒ Controllo di curvatura e normale
- ✓ E' una rappresentazione compatta ed espressiva
  - ⇒ Basta memorizzare pochi punti di controllo
  - ⇒ Rappresentazione matematica di superfici dalla geometria *realmente* curva
  - ⇒ Paragona: mesh: lineari a tratti (curvatura solo simulata con normali o normal map)
- ✓ Risoluzione: numero di patch che compone la sup
  - ⇒ equivalentemente a meno di fattore, del num. di pt. controllo
  - ⇒ E' una res adattiva!

72

Superifici parametriche : benefici

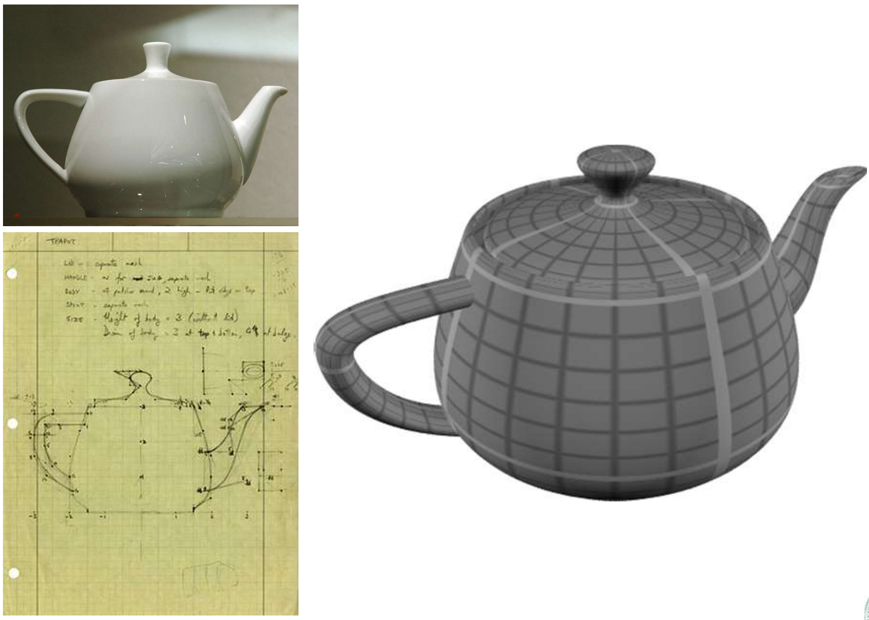
- ✓ La superficie «nasce» già con un dominio parametrico e un uv-mapping incluso nella sua definizione
  - ⇒ per es, è triviale applicare il texture mapping ad un patch
  - ⇒ paragona col caso Mesh: parametrizzazione difficile
- ✓ Sono intuitive da manipolare per il designer del modello
  - ⇒ Esempio: la teiera dello Utha, Il famoso modello 3D, simbolo della Computer Graphic, è stato costruito (anni '70) come superficie di Bézier completamente «a mano», scrivendo i punti di controllo con carta e penna su un foglio (guardando una teiera fisica)
  - ⇒ Oggi, moltissime suite di modellazione 3D sono basate o includono superfici parametriche (NURBS, di Bézier, e/o altro)
  - ⇒ Es: Rhinoceros3d, Autodesk Alias, Aka «Alias StudioTools» moi3D, Blender, Solidworks

Rhinoceros

tool specializzati

73

Bézier patches: per il design (un caso storico)



The Utah Teapot, by Martin Newell (1975)

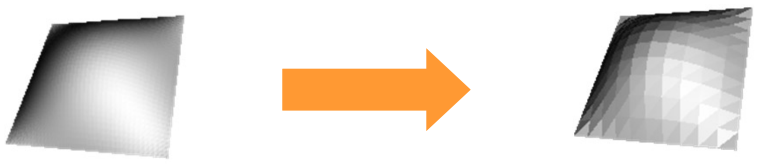
76

Processing su una superficie parametrica

- ✓ In molti contesti, la superficie parametrica è l’input o l’output diretto di task di geometry processing, incluso:
  - ⇒ Semplificazione: riduzione del numero di patch
  - ⇒ Costruzione automatica (a partire da un’altra rappresentazione, quale una mesh). Task difficile.
- ✓ Per molti usi, compreso il rendering, è necessario, viceversa, convertire la superficie parametrica in una mesh poligonale
  - ⇒ Fortunatamente, questo procedimento è semplice!
  - ⇒ Nota: può essere fatto «on demand», per es solo in fase di rendering, usando la rappresentazione originale (assai più compatta) per lo storing del modello 3D e qualsiasi altro uno

77

Da superficie parametrica a mesh



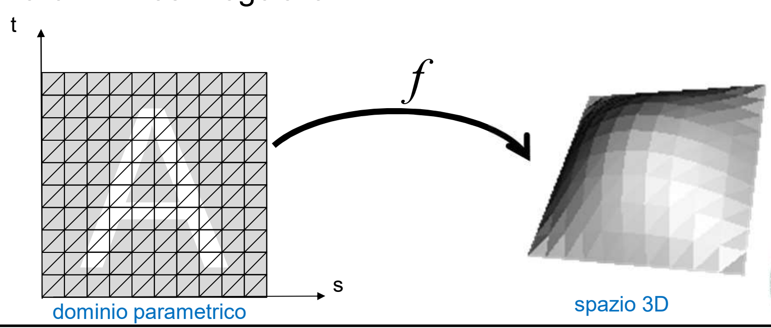
una superficie curva parametrica?

Mesh poligonale Poligoni

78

Da superficie parametrica a mesh poligonale

- ✓ Banale: campiono il dominio parametrico A su una griglia regolare (es.: 10x10)
  - ⇒ (s,t) = (0.0,0.0), (0.1,0.0), … (0.0,0.1), (0.1,0.1)… , (1.0, 1.0)
- ✓ Per ogni posizione campionata (s,t)
  - ⇒ creo un vertice della mesh nel punto $f(s,t)$
  - ⇒ doto ogni vertice della sua normale, ottenuta con le derivate di f
- ✓ Diagonal split so ogni quad ottenuto
- ✓ Risultato: tri-mesh regolare!



79