

46

47

Interpolazione (di n vettori)

$$\sum_i k_i = 1 \quad k_i \geq 0$$

$$\vec{\mathbf{w}} = k_0 \vec{\mathbf{v}}_0 + k_1 \vec{\mathbf{v}}_1 + k_2 \vec{\mathbf{v}}_2$$

i “Pesi” dell’interpolazione

Una “interpolazione lineare” di $\vec{\mathbf{v}}_0$, $\vec{\mathbf{v}}_1$ e $\vec{\mathbf{v}}_2$



49

Interpolazione (caso di 2 vettori)

$$t \in [0,1]$$

$$\vec{\mathbf{w}} = (1 - t) \vec{\mathbf{v}}_0 + (t) \vec{\mathbf{v}}_1$$

i “Pesi” dell’interpolazione



50

Interpolazione fra 2 elementi

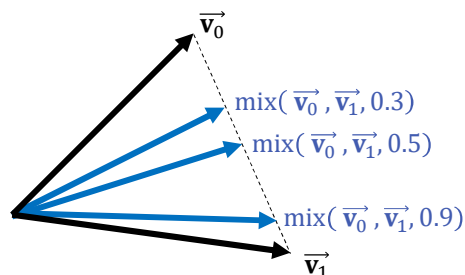
- ✓ Quando $n = 2$, uno dei due pesi è esprimibile come differenza dell'altro

⇒ quindi abbiamo un solo parametro: t , uno dei due pesi e l'altro peso è dato da $(1 - t)$.

⇒ L'interpolazione diventa...

$$\text{mix}(\vec{v}_0, \vec{v}_1, t) = (1 - t) \vec{v}_0 + (t) \vec{v}_1$$

Un sinonimo di
"interpolazione"



51

Interpolazione ed estrapolazione (di n vettori)

- ✓ Quando i pesi $k_0 k_1 k_2 \dots$ sono positivi e a somma 1, cioè:

$$\sum_i k_i = 1 \quad \text{e} \quad \forall i. 0 \leq k_i \leq 1$$

⇒ cioè quando i pesi sono una «partizione dell'unità»

- ✓ allora la combinazione lineare si chiama **interpolazione** (lineare)

⇒ O anche, semplicemente: una «media pesata»

⇒ Caso particolare: se i pesi sono tutti uguali a $1/n$: una media

- ✓ Se invece

$$\sum_i k_i = 1 \quad \text{ma} \quad \exists i. k_i < 0$$

- ✓ allora abbiamo una **estrapolazione** (lineare)



52

Come si interpola fra ...

⇒ ...due **vettori** $\mathbf{v}_0$ e $\mathbf{v}_1$:

$$\mathbf{v}_0 (1 - t) + \mathbf{v}_1 (t)$$

Interpolazione lineare

⇒ ...due **punti** $\mathbf{p}_0$ e $\mathbf{p}_1$:

$$\mathbf{p}_0 (1 - t) + \mathbf{p}_1 (t)$$

Moltiplicazione fra punti e scalari?
 Somma fra punti?
 Queste operazioni, prese individualmente, non hanno alcun senso geometrico

è solo una riscrittura di (verifica!):

$$\mathbf{p}_0 + (\mathbf{p}_1 - \mathbf{p}_0) t$$

una riscrittura che ha un senso geometrico:
 "partendo da $\mathbf{p}_0$, percorro solo una parte t (per es, la metà, o $\frac{3}{4}$, etc) del tragitto che mi porterebbe in $\mathbf{p}_1$ "



53

Interpolazione fra due elementi

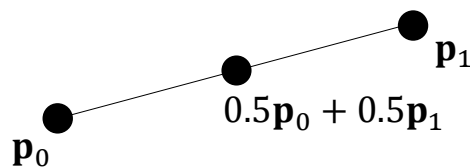
- ✓ Terminologia: (usata in librerie, linguaggi di programmazione...)
 - ⇒ **interpolate** = **mix** = **blend** = **lerp** ← "L" = espressamente lineare
- ✓ **Interpolare** fra coppie di *<qualcosa>* :
 - ⇒ mix(point , point , t) → point
 - ⇒ mix(vector , vector , t) → vector
- ✓ t è il «**peso**» **scalare**
 - ⇒ $t = 0$ → prendi il primo dei due
 - ⇒ $t = 1$ → prendi il secondo dei due
 - ⇒ $t \in (0,1)$ → prendi un misto dei due, ad esempio: ← un'interpolazione propriamente detta
 - ⇒ $t = 0.5$ → prendi la **media** dei due
 - ⇒ $t = 0.1$ → quasi il primo, con un pochino del secondo
 - ⇒ $t < 0$ or $t > 1$ → **estrapolazione**



54

Segmento come luogo di punti

- ✓ Dati due punti $\mathbf{p}_0$ e $\mathbf{p}_1$, analizziamo l'insieme di tutti i punti ottenibili interpolando $\mathbf{p}_0$ e $\mathbf{p}_1$:
- ✓ E' il segmento che li connette!



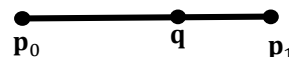
- ✓ “Un segmento è l'insieme dei punti ottenibili interpolando i suoi due estremi”
- ⇒ Domanda (esercizio): qual è invece il luogo dei punti ottenibili come un'estrapploazione di $\mathbf{p}_0$ e $\mathbf{p}_1$?



55

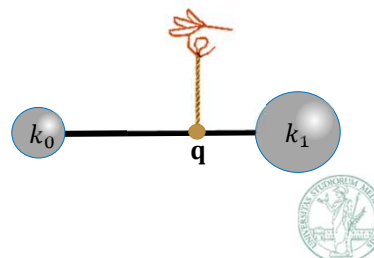
Coordinate baricentriche in un segmento

- ✓ E' anche vero il viceversa: qualsiasi punto in un segmento S è dato da una (e una sola!) interpolazione dei suoi due estremi $\mathbf{p}_0$ e $\mathbf{p}_1$
- ⇒ Con i pesi opportunamente scelti
- ✓ Cioè dato un punto $\mathbf{q} \in S$, esistono unici $k_0, k_1 \in [0, 1]$ con $k_0 + k_1 = 1$ tali che



$$\mathbf{q} = k_0 \mathbf{p}_0 + k_1 \mathbf{p}_1$$

- ✓ k_0, k_1 sono dette le **coordinate baricentriche** di $\mathbf{q}$ nel segmento S
- ⇒ Perché (motivazione storica)... se poniamo due masse k_0 e k_1 in $\mathbf{p}_0$ e $\mathbf{p}_1$, allora $\mathbf{q}$ diventa il baricentro del segmento



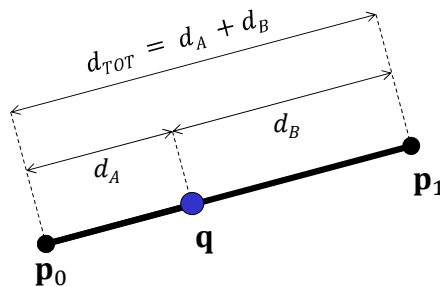
56

Coordinate baricentriche in un segmento

✓ Problemino:

⇒ considera un segmento S di estremi dati $\mathbf{p}_0$ e $\mathbf{p}_1$, e un punto $\mathbf{q} \in S$, come trovo le coordinate baricentriche di $\mathbf{q}$?

$$\mathbf{q} = k_0 \mathbf{p}_0 + k_1 \mathbf{p}_1$$



$$k_0 = d_B / d_{TOT}$$

$$k_1 = d_A / d_{TOT}$$

✓ Soluzione:

⇒ $\mathbf{q}$ spezza S in due sotto-segmenti. L'estensione di ciascun sotto-segmento (diviso l'estensione totale di S) è la coordinata baricentrica relativa all'estremo **OPPOSTO** (verifica con delle prove)

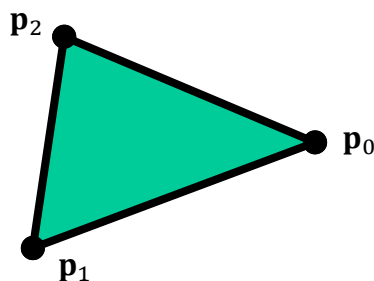


58

Triangolo come luogo di punti

✓ Dati tre punti (in 2D oppure in 3D) $\mathbf{p}_0$, $\mathbf{p}_1$ e $\mathbf{p}_2$, consideriamo l'insieme di tutti i punti ottenibili dalla loro interpolazione

✓ E' il triangolo che ha i vertici in quei tre punti!



✓ "Un triangolo è l'insieme dei punti ottenibili interpolando i suoi tre vertici"

⇒ Domanda (esercizio): qual è invece il luogo dei punti ottenibili come una loro **estrapolazione**?



59

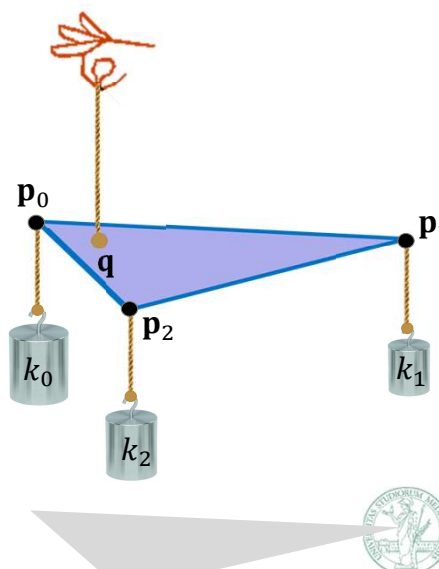
Triangolo come luogo di punti

- ✓ Dato un triangolo T (in 3D) di vertici p_0 e p_1 e p_2 e un punto $q \in T$, esistono unici $k_0, k_1, k_2 \in [0, 1]$ con $k_0 + k_1 + k_2 = 1$ tali che

$$q = k_0 p_0 + k_1 p_1 + k_2 p_2$$

- ✓ k_0, k_1, k_2 sono dette le **coordinate baricentriche** di q nel triangolo T

⇒ Stessa motivazione storica... se poniamo dei pesi k_0, k_1 e k_2 in p_0, p_1 e p_2 , allora q diventa il baricentro del triangolo



61

Coordinate baricentriche in un triangolo

- ✓ Problemino:

⇒ dato un triangolo T con vertici nei punti 3D p_0, p_1, p_2 e un punto $q \in T$ come trova le **coordinate baricentriche** di q in T ?
 Cioè tre scalari $k_{0,1,2}$ tali che...

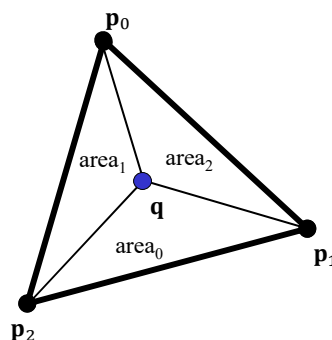
$$q = k_0 p_0 + k_1 p_1 + k_2 p_2$$

$$\text{area}_{TOT} = \text{area}_0 + \text{area}_1 + \text{area}_2$$

$$k_0 = \text{area}_0 / \text{area}_{TOT}$$

$$k_1 = \text{area}_1 / \text{area}_{TOT}$$

$$k_2 = \text{area}_2 / \text{area}_{TOT}$$



- ✓ Soluzione:

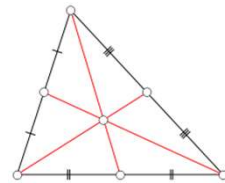
⇒ q spezza T in tre sotto-triangoli. L'area di ciascun sotto-triangolo (diviso l'area totale di T) è la coordinata baricentrica relativa all'estremo OPPOSTO (verifica con delle prove)

63

Coordinate baricentriche: esercizi

✓ Dato un triangolo di vertici $\mathbf{p}_0, \mathbf{p}_1, \mathbf{p}_2$
 quali sono le coordinate baricentriche di...

- ⇒ il punto $\mathbf{p}_1$
- ⇒ un punto a metà del lato fra $\mathbf{p}_0$ e $\mathbf{p}_1$
- ⇒ il baricentro del triangolo
 detto anche centroide del triangolo



Nota: il baricentro di un triangolo è l'intersezione delle tre mediane e secca ogni mediana ad $1/3$ della sua lunghezza

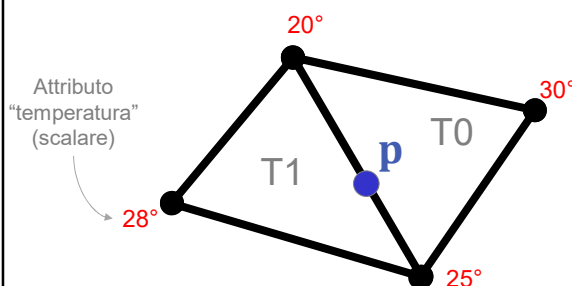
- ⇒ un punto nel segmento fra $\mathbf{p}_0$ e $\mathbf{p}_1$
 che dista da $\mathbf{p}_0$ il triplo di quanto dista da $\mathbf{p}_1$



64

Coordinate baricentriche e interpolazione di attributi

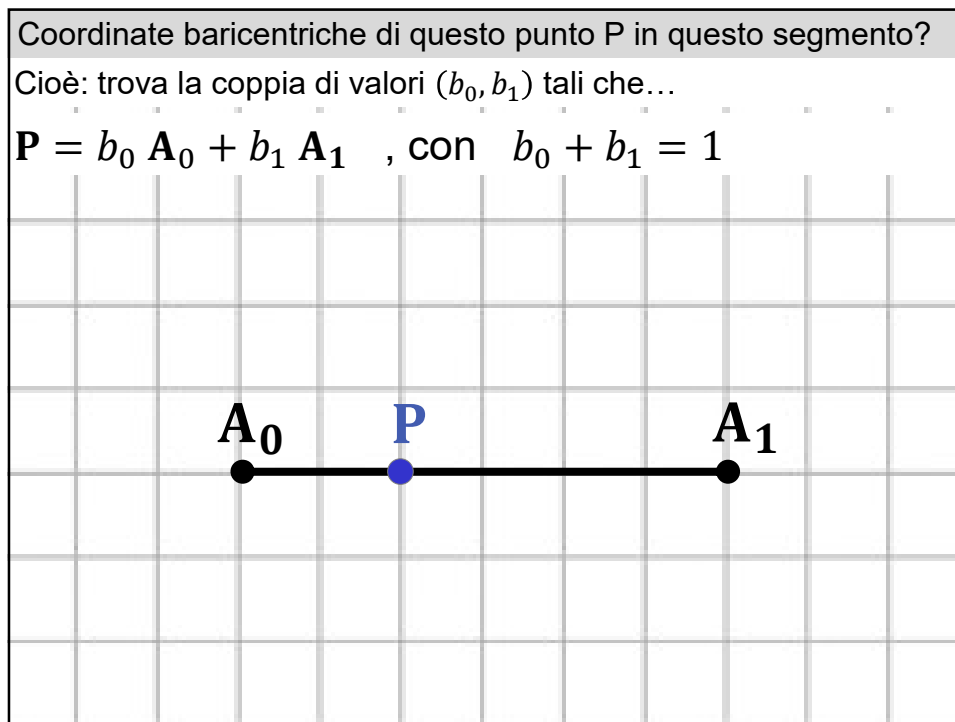
- ✓ Idea: sapendo che
 - ⇒ Un punto $\mathbf{p}$ dentro il triangolo di vertici $\mathbf{v}_0, \mathbf{v}_1$ e $\mathbf{v}_2$ è esprimibile come una interpolazione di $\mathbf{v}_0, \mathbf{v}_1$ e $\mathbf{v}_2$
 - ⇒ (i pesi di questa interpolazione = le coordinate baricentriche di $\mathbf{p}$)
 - ⇒ Ogni vertice è associato ad alcuni attributi a_0, a_1 e a_2
 - ⇒ (di qualsiasi tipo, vettoriali o scalari)
- ✓ otteniamo il valore dell'attributo in $\mathbf{p}$ come la *stessa interpolazione lineare* di a_0, a_1 e a_2
- ✓ Questo produce attributi continui a cavallo delle facce



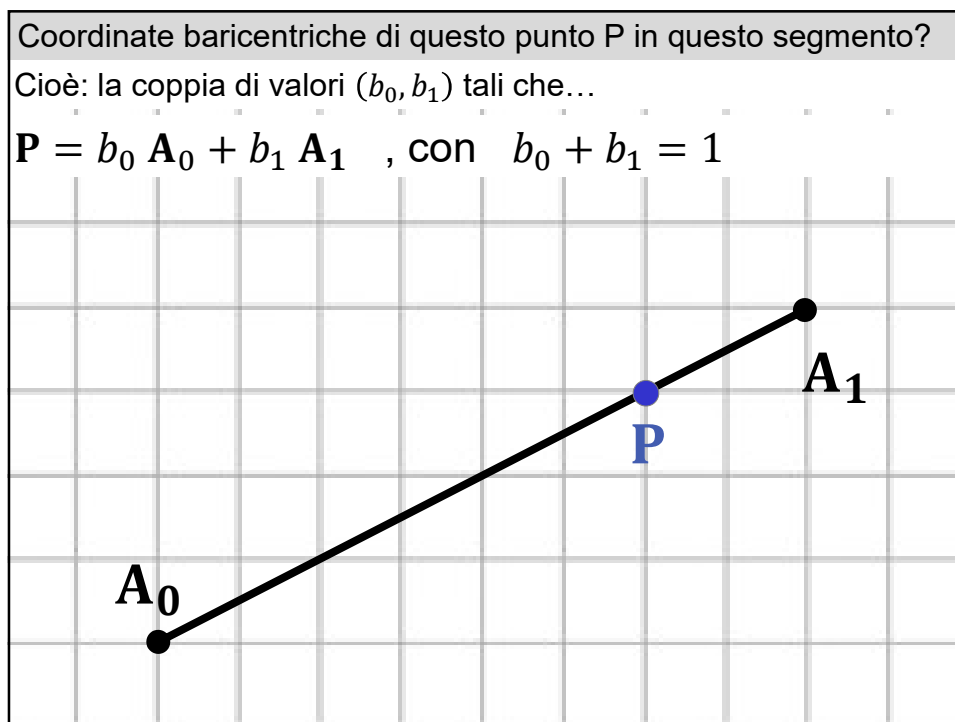
Quale attributo "temperatura" ha il punto $\mathbf{p}$, se lo considero parte del triangolo T1? E se lo considero parte del triangolo T0?



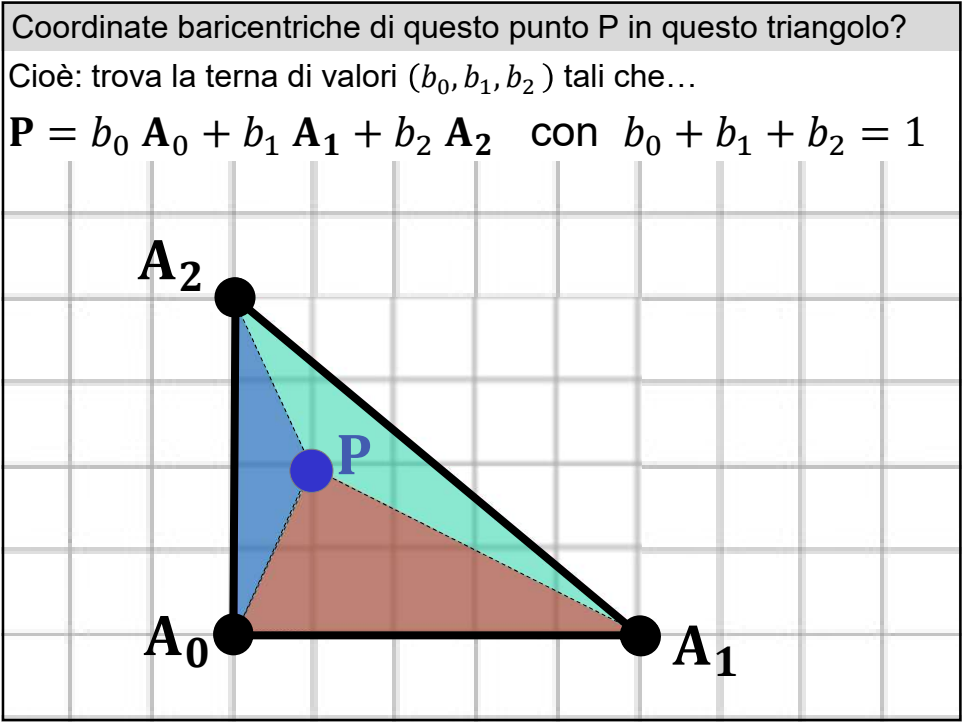
65



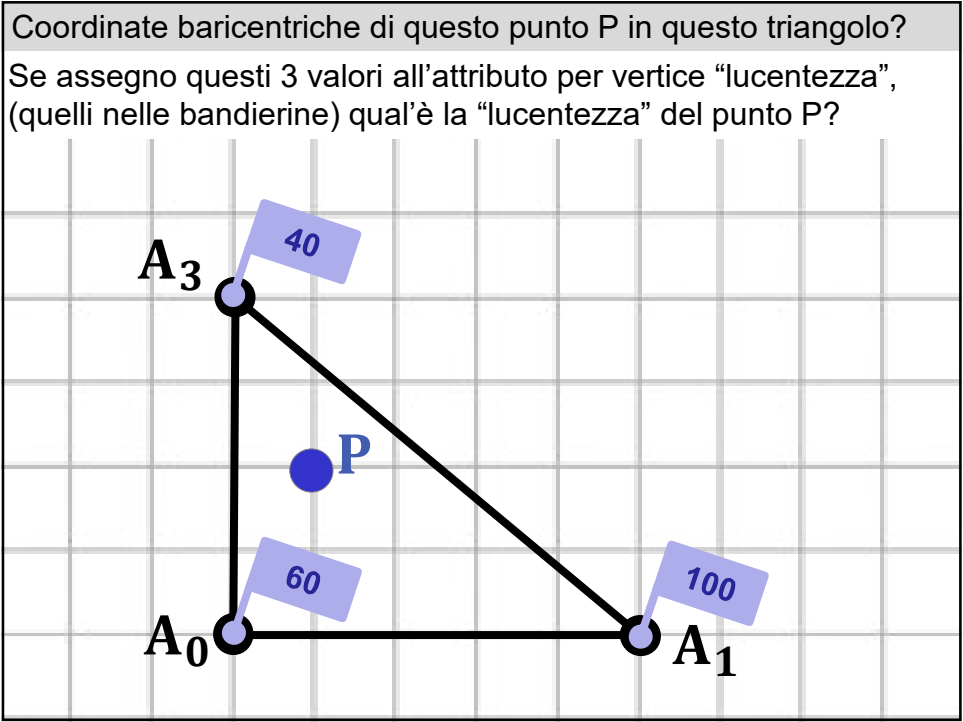
66



67



68



69

Provare a risolvere e verificare gli esercizi sopra

1. Trovare le coordinate baricentriche dei punti dati nei segmenti dati (guardando il disegno)
 - ⇒ Ricordarsi che area triangolo è base x altezza / 2
 - ⇒ Ricordarsi che le coordinate baricentriche sono a somma 1 (se ne trovo due...)
2. Verifica: assegnare le coordinate cartesiane (x,y) dei punti dati (ipotizzare che l'origine sia nell'angolo in basso a destra) poi verificare (nei conti) che le coordinate cartesiane del punto richiesto siano ottenute dalla giusta come interpolaz. lineare dai punti nei vertici del triangolo (o degli estremi del segmento)



70

Questa lezione in breve

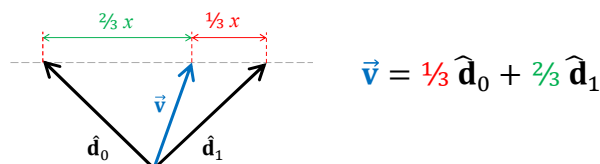
1. Un segmento è il luogo dei punti ottenibile come interpolazione lineare dei suoi due estremi
2. Un triangolo è il luogo dei punti ottenibile come interpolazione lineare dei suoi tre vertici
3. I 3 (o 2) pesi dell'interpolazione che produce un punto in un triangolo (o segmento) sono detti le "coordinate baricentriche" di quel punto in quel triangolo (o segmento)
4. Abbiamo visto come calcolare le coordinate baricentriche di un dato punto in un dato triangolo (o segmento) [accertati di aver capito il procedimento]
5. Le coordinate baricentriche di punto **p** in un triangolo **T** si usano come pesi per interpolare gli attributi (qualsiasi essi siano) definiti sui vertici di **T** in **p**
6. In una mesh di triangoli, gli attributi calcolati in questo modo sulla superficie variano con continuità (cioè, "senza salti di valore") nel passare da un triangolo ad un altro (cioè, nell'attraversare un edge della mesh)



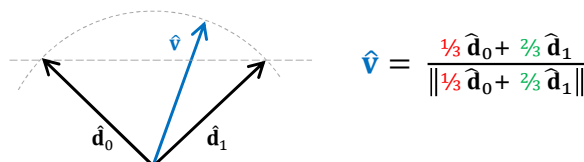
71

Interpolazione fra vettori unitari

- ✓ Attenzione! Interpolando fra due vettori unitari si ottiene un vettore non più unitario



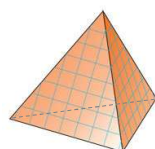
- ✓ Se si necessita un vettore unitario, occorre rinormalizzare dopo l'interpolazione



72

Oltre a N = 3...

- ✓ Le interpolazioni fra 2 punti (in 2D o 3D) formano un **segmento**
 ⇒ i 2 punti sono i suoi estremi
- ✓ Le interpolazioni fra 3 punti (in 2D o 3D) formano un **triangolo**
 ⇒ i 3 punti sono i suoi vertici
- ✓ Le interpolazioni fra 4 punti (in 3D) formano un **tetraedro**
 ⇒ i 4 punti sono i suoi vertici



Tetraedro = piramide a base triangolare
 un solido delimitato da 4 triangoli

⇒ la cosa è generalizzabile a dimensioni maggiori (ma non ci interessa)

- ✓ Per questo, le sequenze di segmenti (linee spezzate), le superfici triangolate (mesh triangolari), e le mesh tetraedri (mesh volumetriche – vedi più avanti) sono dette **complessi simpliciali**



73