

Marco Tarini - Computer Graphics 2025/2026
Università degli Studi di Milano

*Ancora algebra di punti e vettori:
il prodotto cross*



Possibile Libro di testo per questa lezione:
"Mathematics for 3D Game Programming
and Computer Graphics, Third Edition"
Capitolo 2.3

75

Prodotto Cross

- ✓ Operazione da due **vettori** a **vettore**

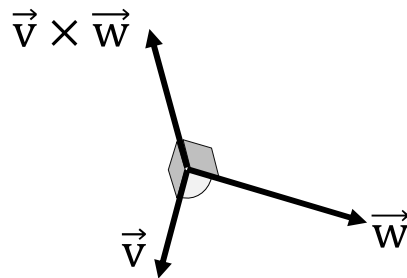
$$\vec{v} \times \vec{w} = \begin{pmatrix} v_x \\ v_y \\ v_z \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} w_x \\ w_y \\ w_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} v_y w_z - v_z w_y \\ v_z w_x - v_x w_z \\ v_x w_y - v_y w_x \end{pmatrix}$$

- ✓ Detto anche:
 - ⇒ Prodotto cross (perché si scrive con la crocetta)
 - ⇒ Prodotto vettoriale (perché restituisce un vettore)
- ✓ Nel codice (librerie, linguaggi...) lo si può trovare scritto come: `cross(v, w)`
- ✓ E' definito solo in 3D (per vettori di $\mathbb{R}^3$) !



76

Direzione del prodotto cross



- ✓ Il prodotto cross fra $\vec{v}$ e $\vec{w}$ è sempre ortogonale sia a $\vec{v}$ che a $\vec{w}$
- ✓ Prodotto cross = operazione per generare un vettore ortogonale a due vettore dati

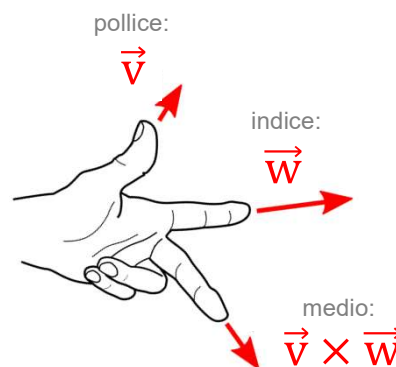


78

Verso del prodotto cross

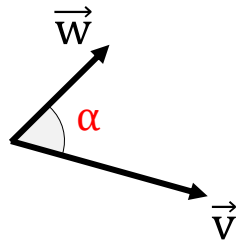
- ✓ Abbiamo due direzioni ortogonale a due vettori dati (cioè al piano passante per quei due vettori), con due versi opposti.
- ✓ **In quale dei due versi sarà orientato il risultato del cross?**

- ✓ Dipende dall'ordine degli operandi!
- ✓ NB: Bisogna applicare la stessa mano usata per *immaginare* gli assi del sistema di riferimento usato per esprimere i vettori



79

Lunghezza del prodotto cross



$$\|\vec{v} \times \vec{w}\| = \|\vec{v}\| \|\vec{w}\| \sin(\alpha)$$

l'angolo fra i due vettori,
 che chiaramente è sempre fra 0° e 180°
 (fra 0 e π radianti),
 quindi il suo seno è positivo (o zero)

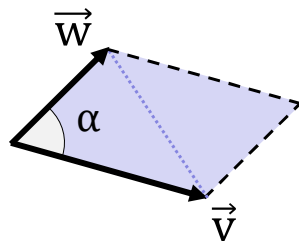
se $\hat{v}$ e $\hat{w}$
 sono unitari:

$$\|\hat{v} \times \hat{w}\| = \sin(\alpha)$$



80

Lunghezza del prodotto cross



$$\|\vec{v} \times \vec{w}\| = \underbrace{\|\vec{v}\| \|\vec{w}\| \sin(\alpha)}_{\text{Area del parallelogramma}}$$

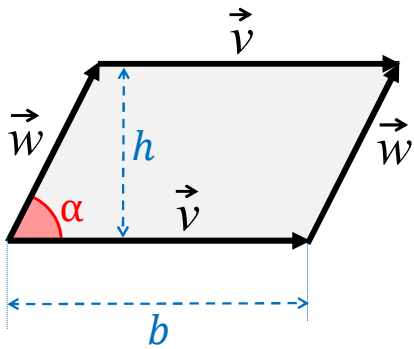
Nota: quindi, è l'area del parallelogramma
 avente per lati $\vec{v}$ e $\vec{w}$
 (cioè la *doppia area* del triangolo
 avente quei due lati).

Lo stesso parallelogramma della regola della
 somma vettoriale. Infatti...



81

Lunghezza del prodotto cross



$$\|\vec{v} \times \vec{w}\| = \underbrace{\|\vec{v}\|}_{b \text{ base}} \cdot \underbrace{\|\vec{w}\| \sin(\alpha)}_{h \text{ altezza}}$$


82

Prodotto cross, ortogonalità e allineamento

- ✓ Se $\vec{v}$ oppure $\vec{w}$ è degenerare (vettori nulli)
 allora $\vec{v} \times \vec{w}$ è degenerare (vettore nullo)
- ✓ Altrimenti:
 - ⇒ $\|\vec{v} \times \vec{w}\| = 0$ sse i due vettori sono allineati
 (sono nella stessa direzione, o in direzioni opposte)
- ✓ Siano $\hat{v}$ e $\hat{w}$ due vettori unitari. Allora
 - ⇒ $\hat{v} \times \hat{w}$ è unitario sse $\hat{v}$ e $\hat{w}$ sono ortogonali
 - ⇒ $\hat{v} \times \hat{w}$ è nullo sse $\hat{v}$ e $\hat{w}$
 sono coincidenti $\hat{v} = \hat{w}$
 oppure opposti $\hat{v} = -\hat{w}$
- ✓ Per qualsiasi vettore $\hat{v}$,
 $\hat{v} \times \hat{v} =$ vettore degenerare (vettore di zeri)



83

Prodotto cross: alcune proprietà

- ✓ Non commuta, anzi è **anti**commutativo:

$$\vec{v} \times \vec{w} = -\vec{w} \times \vec{v}$$

- ✓ E' lineare, cioè

⇒ Distribuisce con la scalatura:

$$k (\vec{v} \times \vec{w}) = (k \vec{v}) \times \vec{w} = \vec{v} \times (k \vec{w})$$

⇒ Distribuisce con la somma vettoriale:

$$\vec{w} \times (\vec{u} + \vec{v}) = \vec{w} \times \vec{u} + \vec{w} \times \vec{v}$$

$$(\vec{u} + \vec{v}) \times \vec{w} = \vec{u} \times \vec{w} + \vec{v} \times \vec{w}$$



84

Prodotto cross: alcune proprietà

- ✓ Quindi:

$$(-\vec{v}) \times \vec{w}$$

$$=$$

$$\vec{v} \times (-\vec{w})$$

$$=$$

$$-(\vec{v} \times \vec{w})$$

$$=$$

$$\vec{w} \times \vec{v}$$

- ✓ Infine, non è associativo: cioè (in generale)

$$\vec{a} \times (\vec{b} \times \vec{c}) \neq (\vec{a} \times \vec{b}) \times \vec{c}$$



85