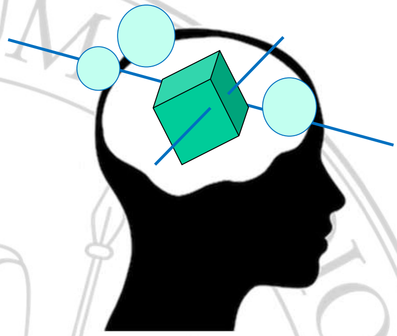
Marco Tarini - Computer Graphics 2024/2025
Università degli Studi di Milano

Vector and Point algebra part 3: prodotto dot



Libro di testo possibile:
"Mathematics for 3D Game Programming and Computer Graphics, Third Edition"
Sec 2.2

90

Prodotto dot (operaz fra due vettori)

- ✓ «dot-product» vettore × vettore → scalare
- ✓ E' definito per tutte le dimensioni
  - ⇒vettori di qualsiasi numero di elementi (coordinate)
- ✓ In tre dimensioni:

$$\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} d \\ e \\ f \end{pmatrix} = ad + be + cf$$

91

Prodotto dot: intro

✓ Va da due vettori a uno scalare

$$\vec{v} \cdot \vec{w} \in \mathbb{R}$$

$$\vec{v} \cdot \vec{w} = (v_x, v_y, v_z) \cdot (w_x, w_y, w_z) = v_x w_x + v_y w_y + v_z w_z$$

- ⇒ Come stiamo per vedere, questa semplice operazione (esprimibile come un computo banale delle coordinate dei suoi operatori) è associata ad una semantica spaziale (e non solo) molto ricca
- ⇒ In particolare, a noi sarà molto utile come *test di ortogonalità*: fa 0 *sse* i due operatori sono ortogonali (formano un angolo retto) (oppure se almeno uno di loro è un vettore degenere)
- ⇒ Nota: il prodotto dot è definito in qualsiasi dimensione (con 2 - piani, 3 - spazi, o maggiore di 3 - iperspazi) e tutto quello che stiamo per dire vale in qualsiasi dimensione

92

Prodotto dot: nomi alternativi

$$\vec{v} \cdot \vec{w} \in \mathbb{R}$$

con $\vec{v}, \vec{w} \in \mathbb{R}^3$

✓ E’ detto anche:

- ⇒ Prodotto dot (perché si scrive con un puntino)
- ⇒ Prodotto scalare (perché restituisce uno scalare)
- ⇒ Prodotto «riga-per-colonna», *se* scrivo il primo vettore come riga e il secondo come colonna, cosa che posso scrivere ($\vec{v}^T \vec{w}$)
- ⇒ Prodotto interno

93

Prodotto Dot: notazioni alternative

- Denotato anche come:

$$\vec{v} \cdot \vec{w}$$

nota il "pallino", che dà il nome al prodotto (non si omette!). Useremo questa notazione.

$$\langle \vec{v} , \vec{w} \rangle$$

$$\vec{v}^{T} \quad \vec{w}$$

"Il trasposto di v (v come vettore riga, cioè una matrice 1x3) per il vettore colonna w" (cioè una matrice 3x1)

- Nel codice si trova (in linguaggi o librerie) con sinassi come:

`dot(v,w)`	`v.dot(w)`	`v*w`
funzione (metodo più comune)	metodo	operatore (infisso)

94

Prodotto dot: alcune proprietà algebriche

- Commuta:

$$\vec{v} \cdot \vec{w} = \vec{w} \cdot \vec{v}$$

- E' lineare, cioè
  - ⇒ Distribuisce con scalatura:

$$k\ (\vec{v} \cdot \vec{w}) = (k\ \vec{v}) \cdot \vec{w} = \vec{v} \cdot (k\vec{w})$$

  - ⇒ Distribuisce con la somma vettoriale:

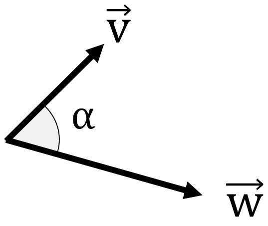
$$\vec{w} \cdot (\vec{u} + \vec{v}) = \vec{w} \cdot \vec{u} + \vec{w} \cdot \vec{v}$$

- Si può usare per riscrivere la norma:

$$\vec{v} \cdot \vec{v} = ||\vec{v}||^2 \quad \text{cioè} \quad ||\vec{v}|| = \sqrt{\vec{v} \cdot \vec{v}}$$

95

Prodotto dot e coseno



$$\vec{v} \cdot \vec{w} = \|\vec{v}\| \ \|\vec{w}\| \ \cos(\alpha)$$

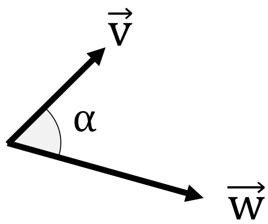
quindi se $\vec{v}$ e $\vec{w}$ non sono nulli: $\vec{v} \cdot \vec{w} = 0 \iff$ **u** e **v** ortogonali

se $\hat{v}$ e $\hat{w}$ sono unitari: $\hat{v} \cdot \hat{w} = \cos(\alpha)$

96

Prodotto dot e angolo

- ✓ Se $\vec{v}$ oppure $\vec{w}$ è degenere (vettore nullo) allora $\vec{v} \cdot \vec{w} = 0$
- ✓ Altrimenti:
  - ⇒ $\vec{v} \cdot \vec{w} > 0$ i due vettori sono **concordi**, $\alpha < 90°$
  - ⇒ $\vec{v} \cdot \vec{w} = 0$ i due vettori sono **ortogonali**, $\alpha = 90°$
  - ⇒ $\vec{v} \cdot \vec{w} < 0$ i due vettori sono **discordi**, $\alpha > 90°$



97

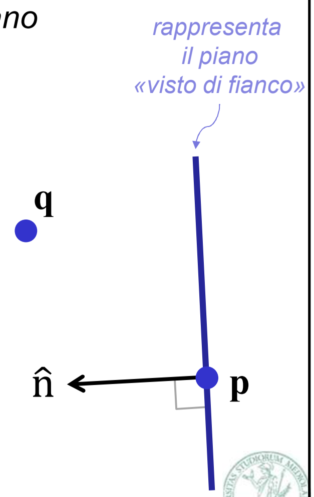
Prodotto dot fra vettori unitari

- Siano $\hat{\mathrm{v}}$ e $\widehat{\mathrm{w}}$ due vettori unitari
- I due vettori sono…
  - ⇒sse $\hat{\mathrm{v}} \cdot \widehat{\mathrm{w}} = 1$: coincidenti, cioè uguali
  - ⇒sse $0 < \hat{\mathrm{v}} \cdot \widehat{\mathrm{w}} < 1$: concordi (ma non uguali)
  - ⇒sse $\hat{\mathrm{v}} \cdot \widehat{\mathrm{w}} = 0$: ortogonali
  - ⇒sse $-1 < \hat{\mathrm{v}} \cdot \widehat{\mathrm{w}} < 0$: discordi (ma non opposti)
  - ⇒sse $\hat{\mathrm{v}} \cdot \widehat{\mathrm{w}} = -1$: opposti
- In pratica: il prodotto dot fra vettori unitari fornisce una **misura della somiglianza** fra i due vettori, da +1 (identici) a –1 (opposti)

98

Esercizio: test punto / piano

- Sia dato un piano passante per $\mathbf{p}$ con normale $\hat{\mathrm{n}}$
  - ⇒normale = *vett unitario ortogonale al piano*
  - ⇒$\mathbf{p}$ punto, $\hat{\mathrm{n}}$ vettore unitario
- Calcolare se un dato punto $\mathbf{q}$ …
  - ⇒giace sul piano
  - ⇒si trova davanti al piano (è nel semispazio *davanti* al piano)
  - ⇒si trova dietro al piano (è nel semispazio *dietro* al piano)



100

Esercizio: test punto / piano

✓ Soluz:

$$(\mathbf{Q} - \mathbf{P}) \cdot \mathbf{n} = 0 \;\Leftrightarrow\; \alpha = 90° \;\Leftrightarrow\; \mathbf{Q} \text{ sul piano}$$
$$(\mathbf{Q} - \mathbf{P}) \cdot \mathbf{n} < 0 \;\Leftrightarrow\; \alpha > 90° \;\Leftrightarrow\; \mathbf{Q} \text{ dietro}$$
$$(\mathbf{Q} - \mathbf{P}) \cdot \mathbf{n} > 0 \;\Leftrightarrow\; \alpha < 90° \;\Leftrightarrow\; \mathbf{Q} \text{ davanti}$$

✓ note:

- ⇒ questo si estende a tutte le dimensioni (rette in R2, piani in R3, iperpiani in R4…)
- ⇒ il test non richiede che **n** sia unitario, perché ci basta il *segno* del dot product
- ⇒ $(\mathbf{Q} - \mathbf{P}) \cdot \mathbf{n} = (\mathbf{Q} \cdot \mathbf{n}) - (\mathbf{P} \cdot \mathbf{n})$ e $\mathbf{P} \cdot \mathbf{n}$ dipende solo dal piano
- ⇒ cioè per testare (e memorizzare) il piano mi bastano **n** (una direzione) e lo scalare $d = -(\mathbf{P} \cdot \mathbf{n})$

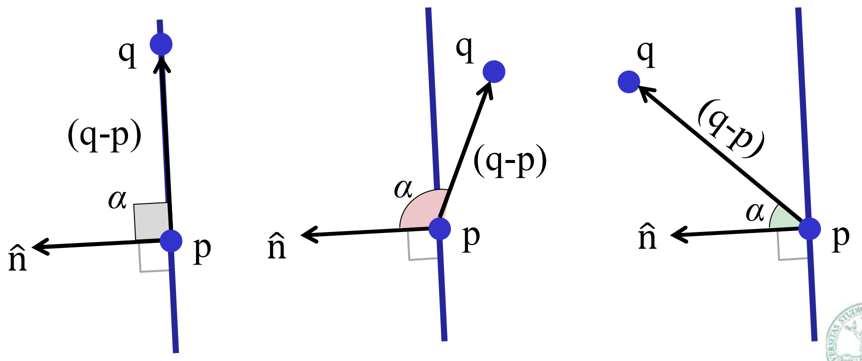
101

Esercizio: test punto / piano

✓ Soluz:

$$(\mathbf{q} - \mathbf{p}) \cdot \hat{n} = 0 \;\Leftrightarrow\; \alpha = 90° \;\Leftrightarrow\; \mathbf{q} \text{ sul piano}$$
$$(\mathbf{q} - \mathbf{p}) \cdot \hat{n} < 0 \;\Leftrightarrow\; \alpha > 90° \;\Leftrightarrow\; \mathbf{q} \text{ dietro al piano}$$
$$(\mathbf{q} - \mathbf{p}) \cdot \hat{n} > 0 \;\Leftrightarrow\; \alpha < 90° \;\Leftrightarrow\; \mathbf{q} \text{ davanti al piano}$$

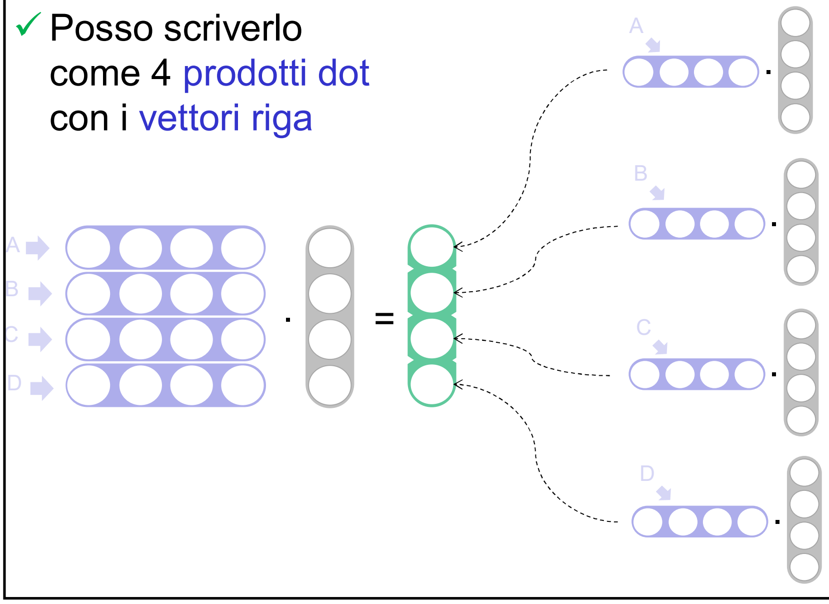
dot product



102

Ripasso: prodotto Matrice × Vettore («riga per colonna»)

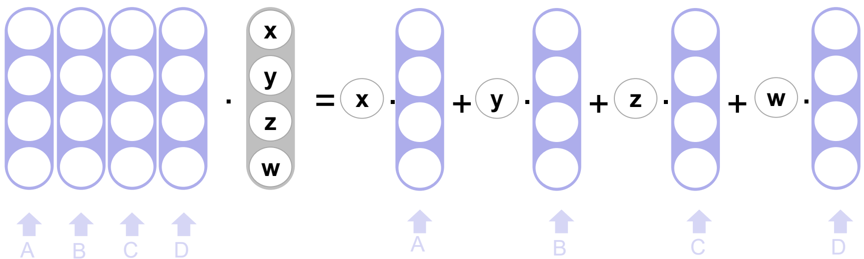
✓ Posso scriverlo come 4 prodotti dot con i vettori riga



118

Ripasso: prodotto Matrice × Vettore («riga per colonna»)

✓ Ma posso anche scriverlo come: una combinazione lineare dei vettori colonna



119